

A. gr. b.

Apollonius

~~468~~

33. W.

[Faint signature]

Ack.

Der Kunde der classischen Philologie,
Johann Christian J. L. Paulus,
Herausgeber und Herausgeber des Kunden,
der Kunde der classischen Philologie,
Herausgeber.
Herausgeber
1822.

<36700071130019

<36700071130019

Bayer. Staatsbibliothek

1847

1840

Die

Bücher des Apollonius von Perga

DE SECTIONE RATIONIS

nach dem Lateinischen des

E d m. H a l l e y

frey bearbeitet, und mit einem Anhange versehen

v o n

Dr. W. A. Diesterweg,

ordentlichem Professor der Mathematik an der königl. preuss.
Rheinuniversität.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Mit 5 Steintafeln.

B e r l i n ,

b e y , G e o r g R e i m e r .

1824.

DE SECTIONE RATIONIS

Bücher des Apollonius von Perge

nach dem Lateinischen des

Edm. Heile

des Apollonius von Perge, und auf einem Anfangs versehen

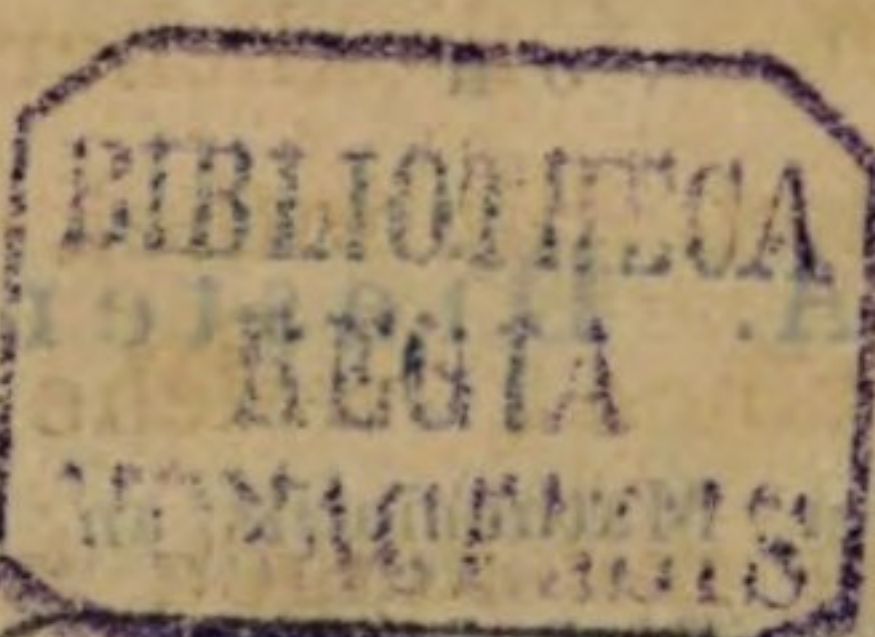
sein. Die Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, sind

in der Ordnung der Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, sind

in der Ordnung der Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, sind

in der Ordnung der Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, sind

in der Ordnung der Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, sind



Bayerische
Staatsbibliothek
München

Mit 5 Steinplatten.

Berlin,

Georg Reimer

1824

V o r r e d e.

Von den Schriften des Apollonius von Perga gehörte die Schrift $\pi\epsilon\rho\iota\ \lambda\acute{o}\gamma\omicron\upsilon\ \alpha\pi\acute{o}\tau\omicron\mu\eta\varsigma$ zu den verloren gegangenen. Glücklicherweise fand sich in der Bodlejanischen Bibliothek eine arabische Uebersetzung derselben, welche, nachdem es mehreren Gelehrten mislungen war, das Glück hatte, von dem berühmten Mathematiker, Edm. Halley, Professor zu Oxford, im Jahr 1706 in das Lateinische übersetzt zu werden. Sie ist eine vortreffliche Schrift, und verdient als ein Muster der geometrisch - analytischen Behandlung einer Aufgabe in allen ihren Fällen von jedem jungen Mathematiker studiert zu werden. Dafür bürgt das Zeugniß des Alterthums, welches ihrem Verfasser den Nahmen des großen Geometers beilegte, und das Zeugniß Neuton's, welcher sie mit dem Nahmen seiner Lieblingsschrift beehrte.

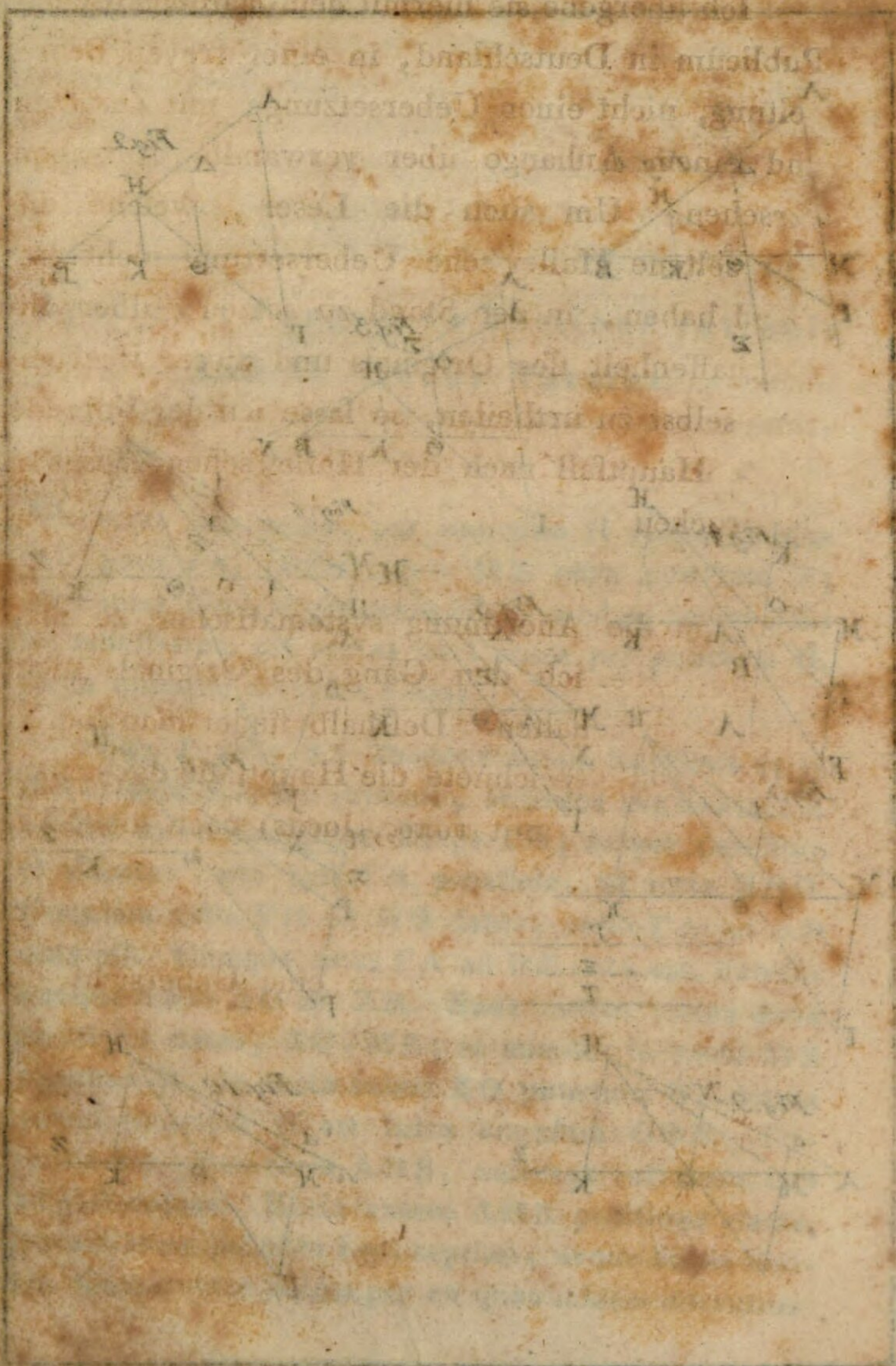
Ich übergebe sie hiermit dem mathematischen Publicum in Deutschland, in einer freyen Bearbeitung, nicht einer Uebersetzung; mit Zusätzen und einem Anhange über verwandte Aufgaben versehen. Um auch die Leser, welche die sehr seltene Halley'sche Uebersetzung nicht zur Hand haben, in den Stand zu setzen, über die Beschaffenheit des Originals und dieser Bearbeitung selbst zu urtheilen, so lasse ich der Vorrede einen Hauptfall nach der Halley'schen Ausgabe beydrucken.

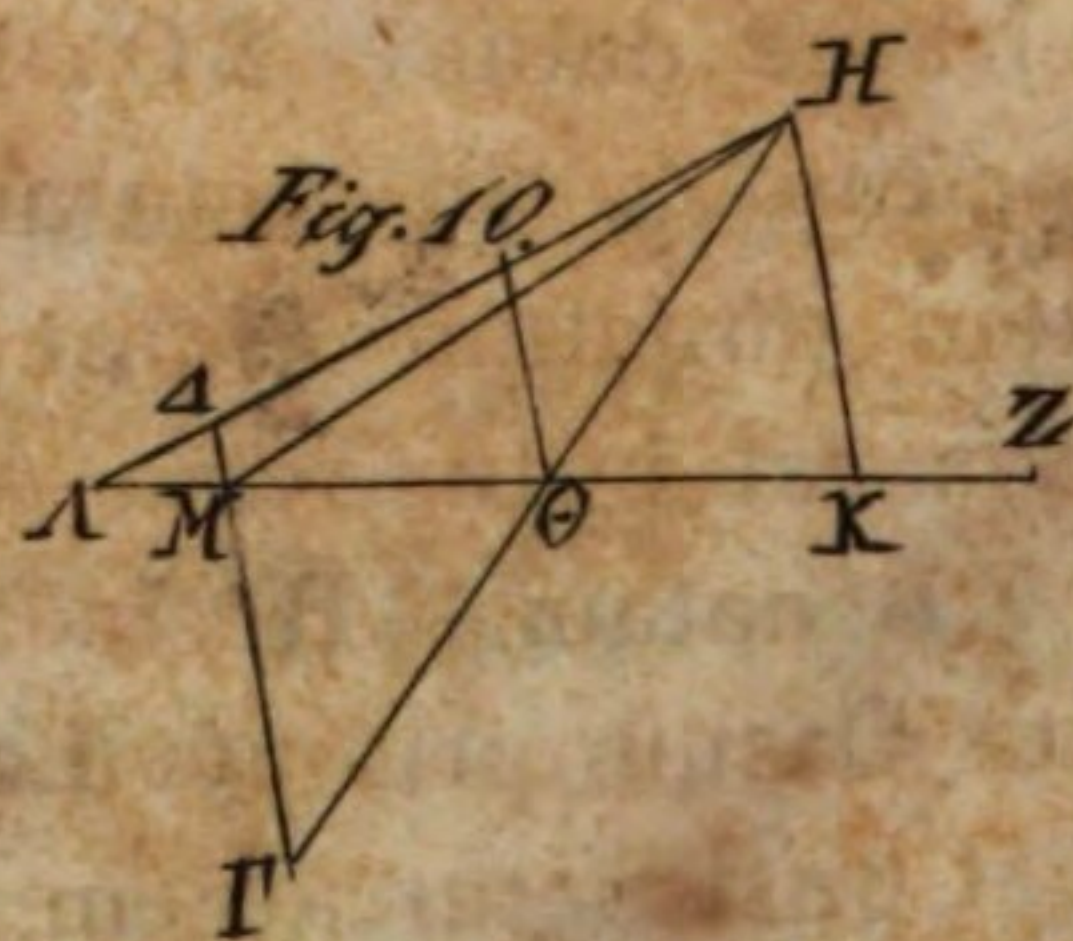
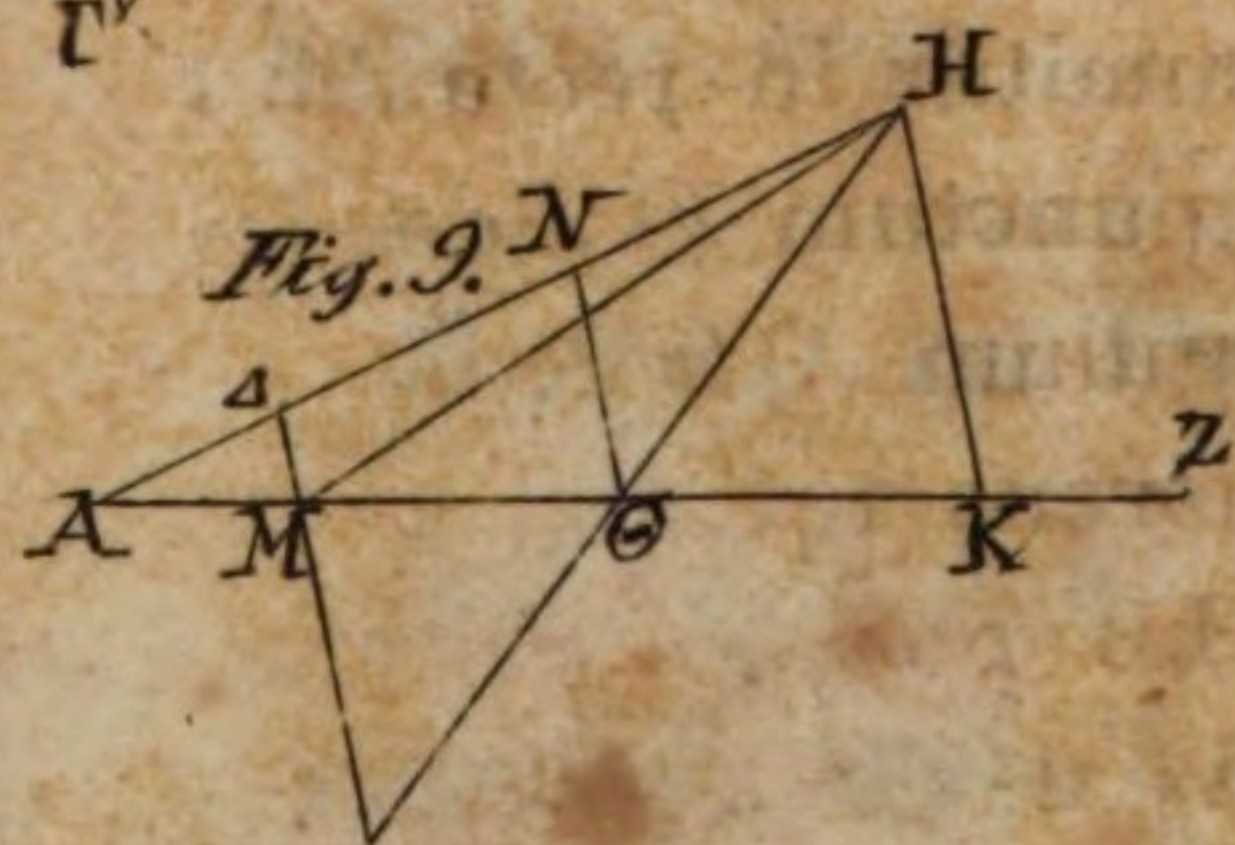
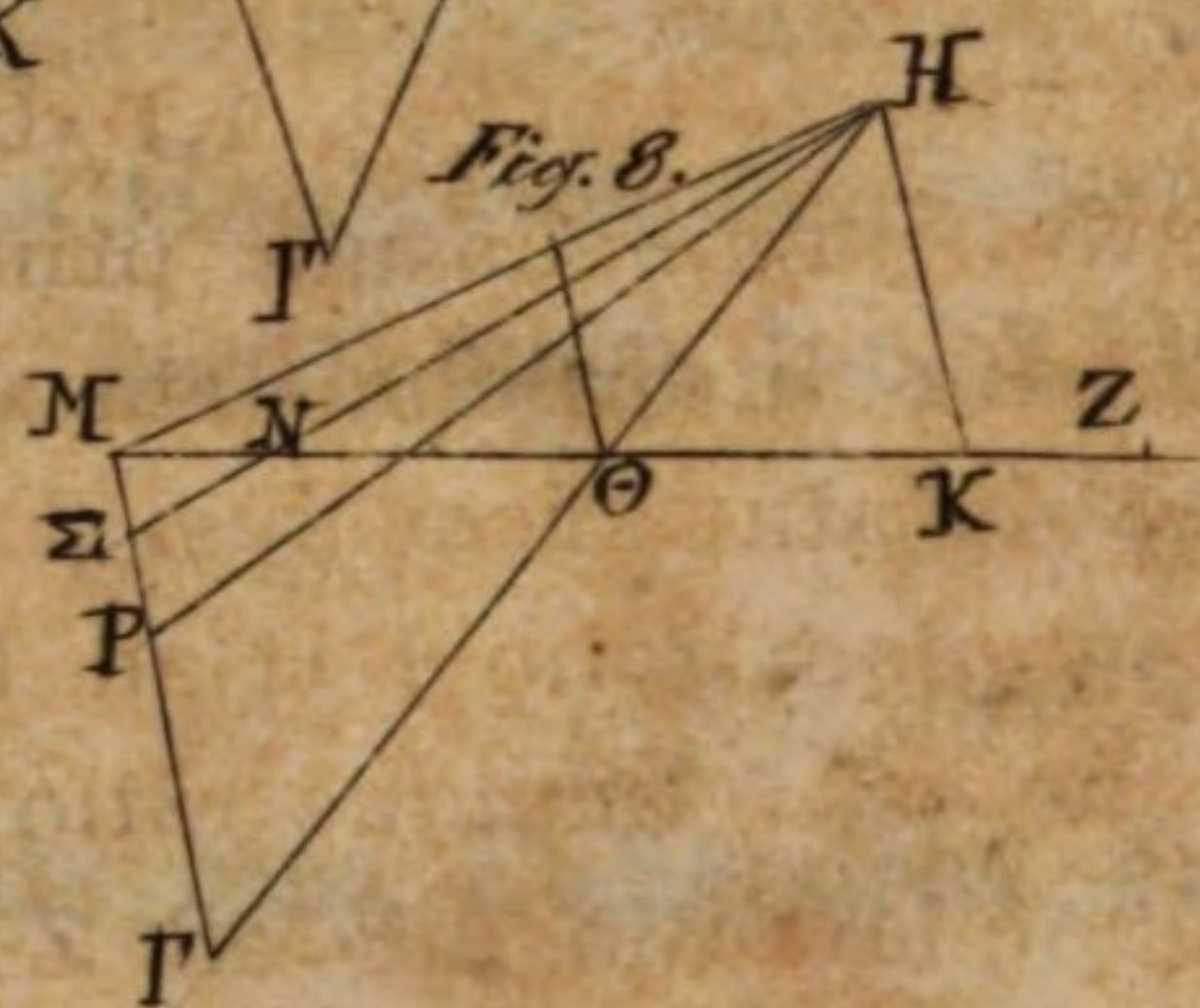
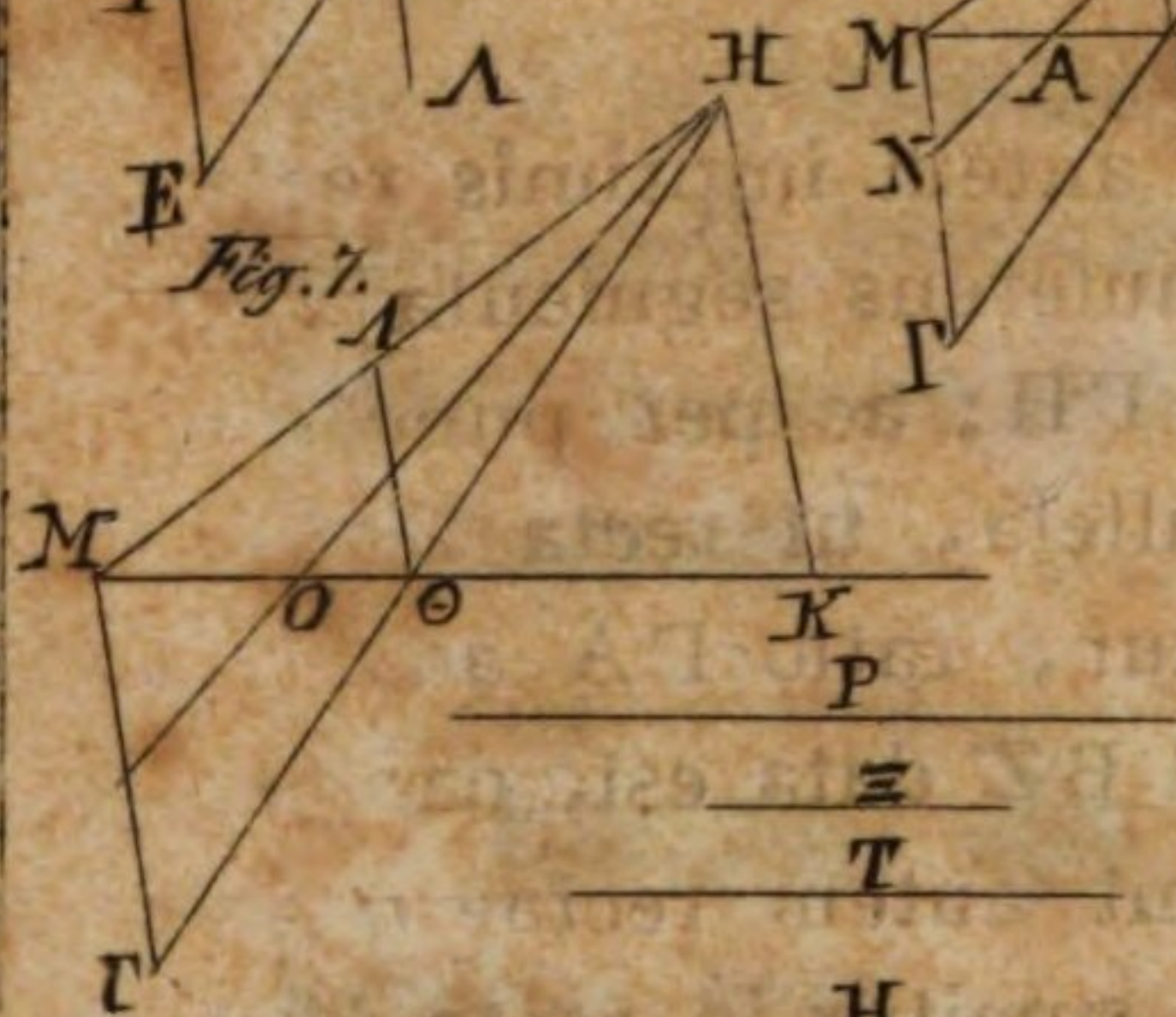
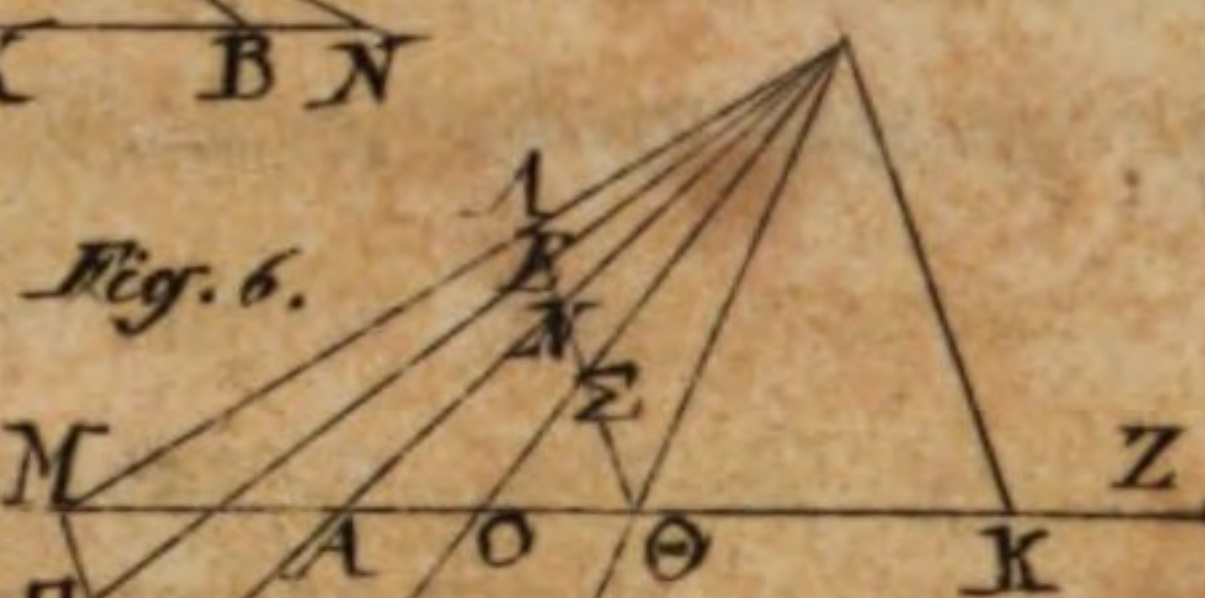
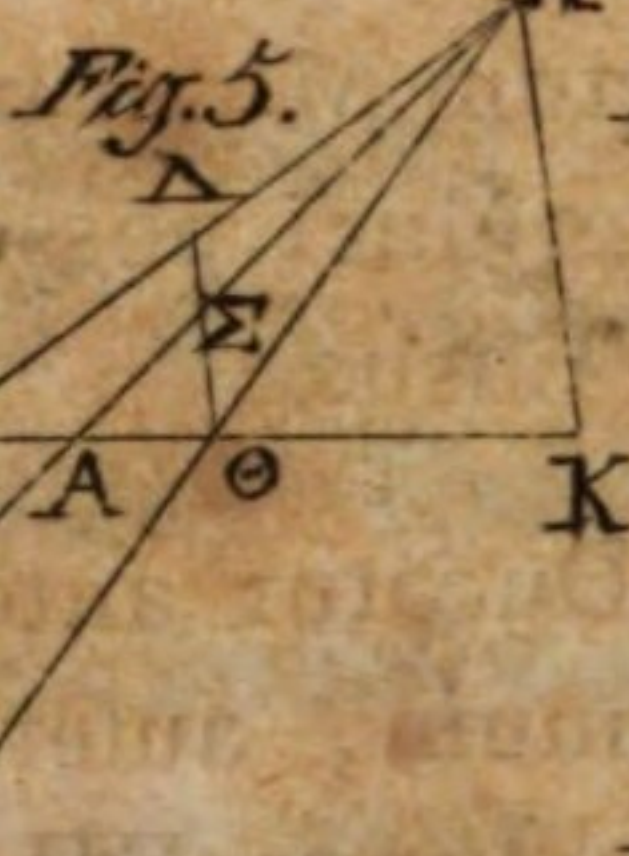
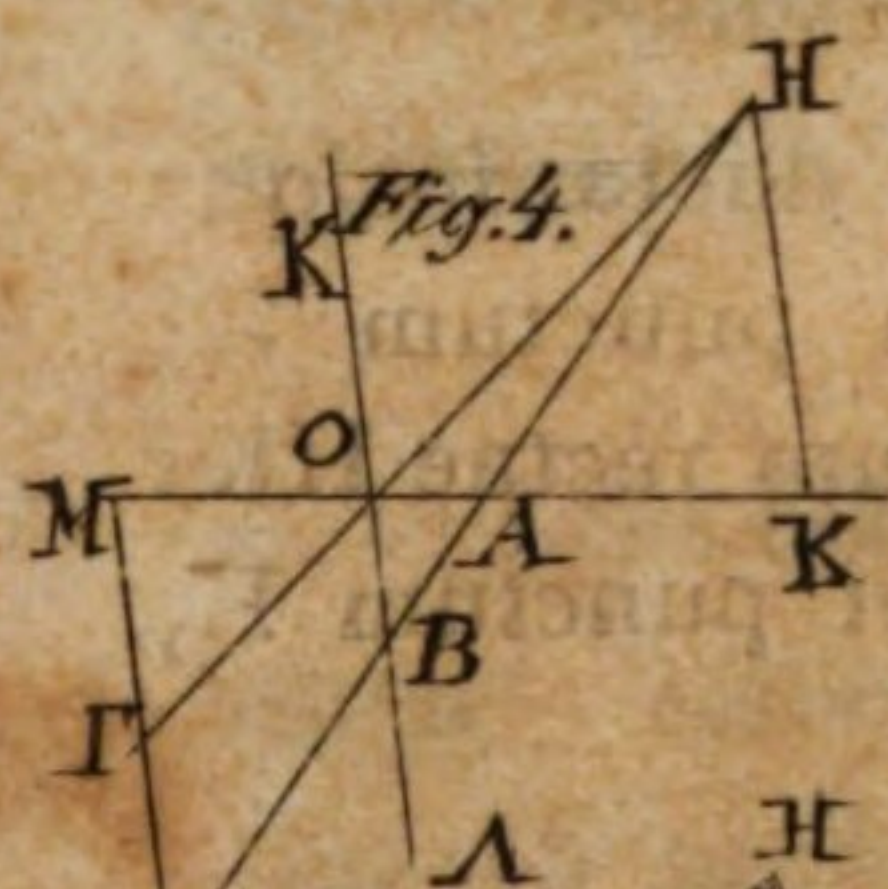
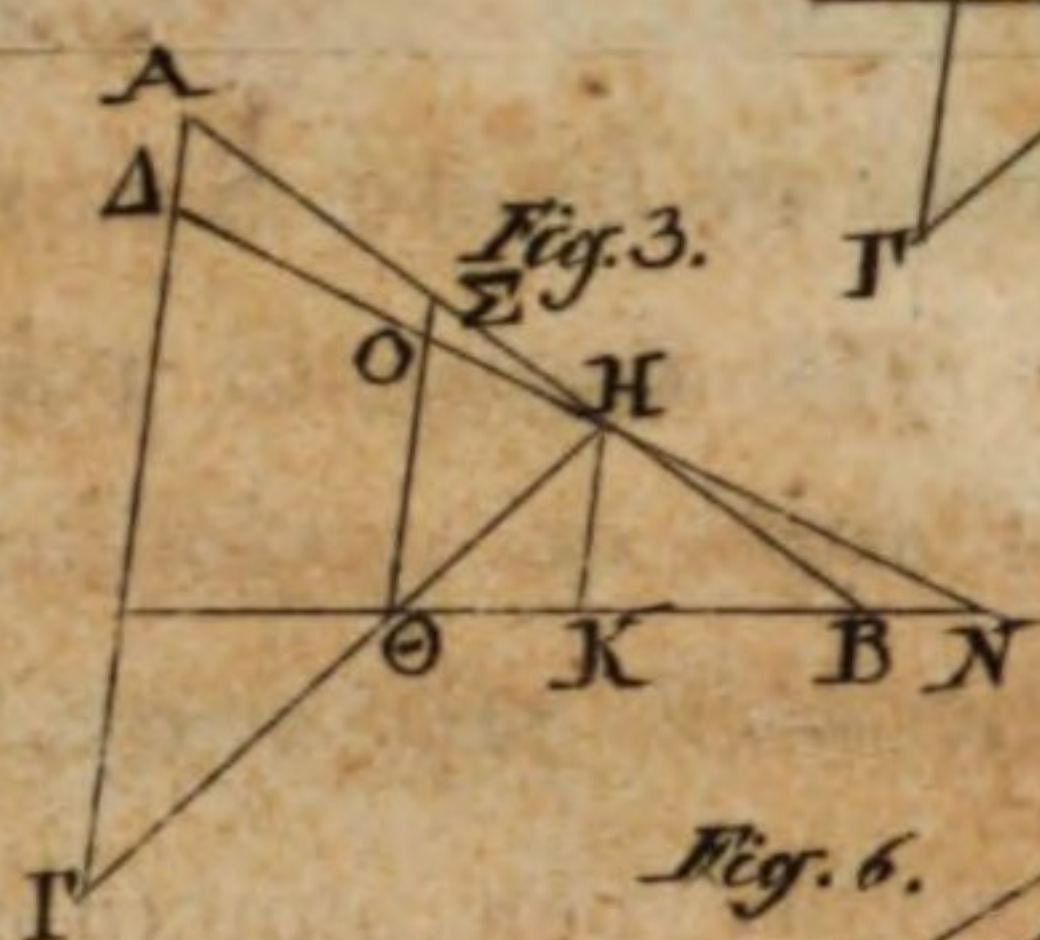
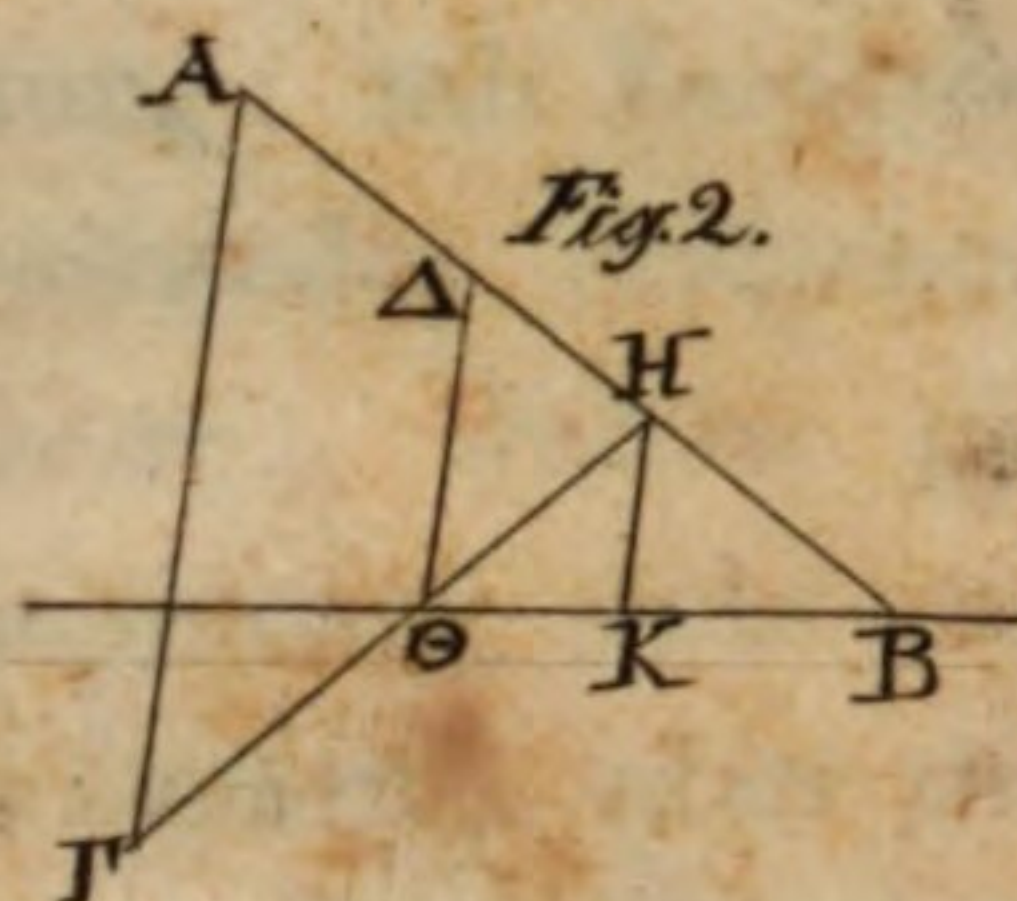
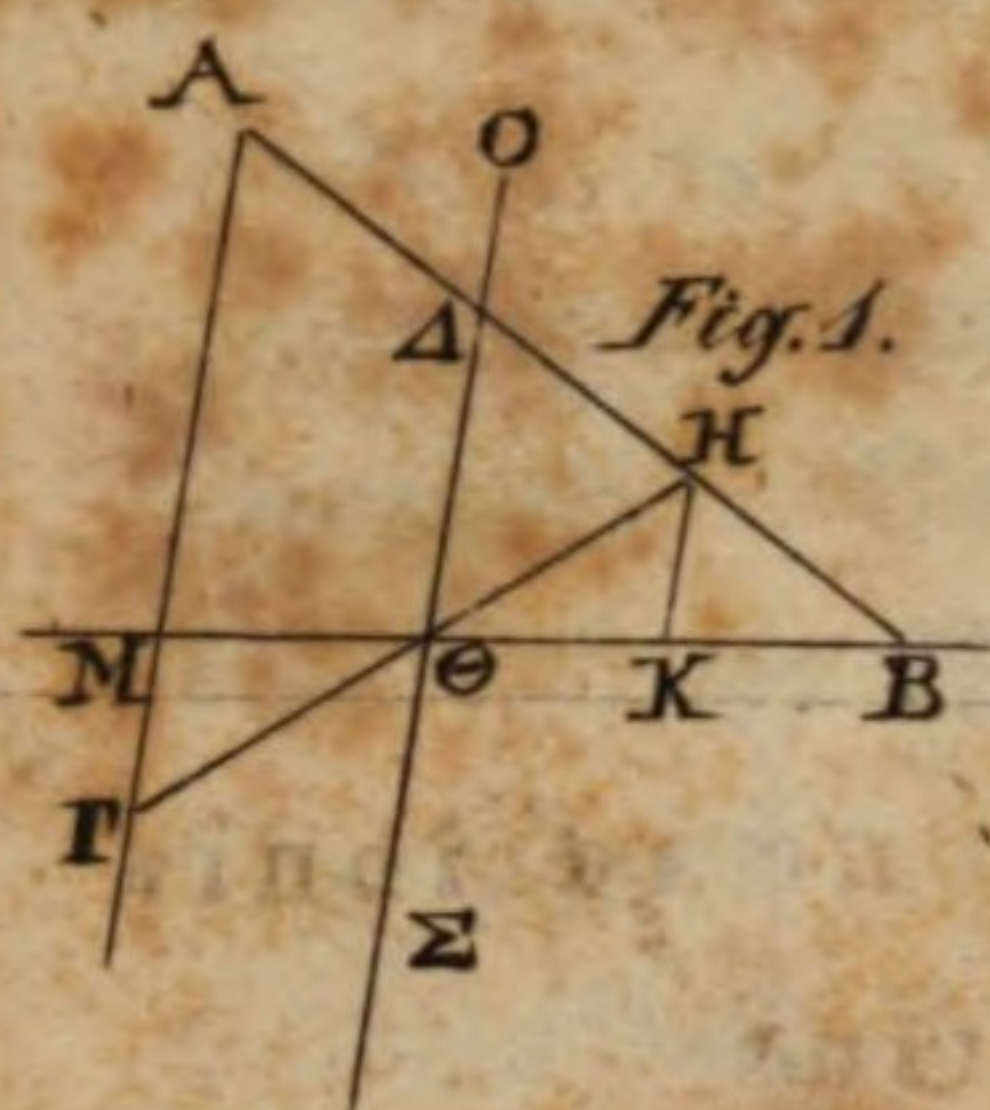
Um die Anordnung systematischer zu machen, habe ich den Gang des Originals nicht überall beybehalten. Deshalb findet man loc. X. (Apollonius bezeichnete die Hauptfälle der behandelten Aufgabe mit τόπος, locus) nach loc. XIV. abgehandelt.

Ich füge der Vorrede eine Uebersicht des Inhaltes bey.

Bonn, im Dec. 1823.

Diesterweg.





Apollonii Pergaei de Sectione rationis

Lib. II. Locus Tertius.

Occurrat jam recta, per punctum H ducta ipsique AT parallela, rectae alteri MB citra punctum Z ; sive inter illud ac punctum M , ad modum rectae HK : ac manifestum est rectas duci posse per punctum H , juxta quinque diversos Casus.

Cas. I. (Fig. 1.) Ducatur autem imprimis recta AB , juxta Casum primum, auferens segmenta TA ad BZ in ratione data. Junge TH ; ac per punctum Θ ducatur recta ipsi TA parallela, ut recta $\Sigma\Theta O$. Quoniam ratio TH ad $H\Theta$ datur, ratio TA ad $\Delta\Theta$ data est. Cumque ratio TA ad BZ data est, dabitur quoque ratio $\Delta\Theta$ ad ZB . Sunt autem rectae duae positione datae, ΣO , MB ; ac sumitur in recta MB punctum Z , in recta autem ΣO punctum Θ ; datum autem punctum H est intra angulum $O\Theta B$. Ducenda est igitur recta AHB , auferens rationem $\Delta\Theta$ ad ZB datam. Recta autem AHB positione datur, juxta Casum primum Loci septimi, neque habet limites. Construetur autem per ea quae ibidem docentur.

Cas. II. (Fig. 2. 3.) Ducatur recta AB , juxta Casum secundum, auferens rationem ΓA ad BZ datam. Manentibus autem descriptis, cum ratio ΓA ad $\Delta \Theta$ data est, atque etiam ratio $\Theta \Delta$ ad ZB datur, recta quoque AB dabitur positione, per Casum secundum Loci septimi.

Determinatur autem hunc in modum. Capiatur ΘB media proportionalis inter ipsas $Z\Theta$, ΘK ; junctaque HB ac producta ad A , dico quod recta AB aufert rationem ΓA ad BZ , minorem quavis alia ratione, quae resecari possit à rectis per punctum H ductis, ipsique KZ occurrentibus. Ducatur enim alia, ut ΔHN . Cumque recta ΘB media proportionalis est inter $Z\Theta$, ΘK ; erit ratio $\Sigma \Theta$ ad BZ minor ratione $O\Theta$ ad ZN : ac permutando, erit ratio $\Sigma \Theta$ ad ΘO minor ratione BZ ad ZN . Sed $\Sigma \Theta$ est ad ΘO ut $A\Gamma$ ad $\Gamma \Delta$; adeoque ratio $A\Gamma$ ad $\Gamma \Delta$ minor erit ratione BZ ad ZN : quare permutando, ratio $A\Gamma$ ad BZ minor erit ratione $\Gamma \Delta$ ad ZN . Recta igitur AB aufert rationem $A\Gamma$ ad BZ minorem qualibet ratione, à rectis per H transeuntibus rectaeque KZ occurrentibus, abscissa.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis; sit ΘB media proportionalis inter rectas $Z\Theta$, ΘK ; junctaque HB producat ad A . Dico quod recta AB auferet rationem ΓA ad BZ , minorem quavis alia ratione, quam abscindere potest recta quaevis alia per punctum H ducta, ipsique KZ occurrens. Quod si ratio ad construendum proposita aequalis fuerit rationi ΓA ad ZB ; tum recta AB sola solvit problema; si minor fuerit eâ, compositio fieri non potest. Si vero major fuerit eâ,

componetur duobus modis, ab utrâque parte ipsius AB . Sit autem (Fig. 3.) ratio data sicut N ad T , quae major sit ratione ΓA ad BZ . Fiat ut ΓH ad $H\Theta$ ita N ad Ξ : ac manifestum est ex aequo, quod ratio Ξ ad T major erit ratione $\Theta\Sigma$ ad BZ . Sed ratio ΘO ad NZ major est eâ; quia ΘB media proportionalis est inter $Z\Theta$ et ΘK : unde constat rectas duas duci posse per punctum H , ab utraque parte ipsius AB , quae secant à rectis $\Theta\Sigma$, ZK , rationes aequales rationi Ξ ad T . Constat autem ex praemissis rectas hunc in modum ductas solvere problema.

Cas. III. (Fig. 4.) Ducatur jam, juxta Casum tertium, recta auferens rationem ΓE ad AZ datam. Quoniam ratio $E\Gamma$ ad $B\Theta$ datur, ac ratio quoque $B\Theta$ ad AZ data est; recta EH positione datur: per Casum tertium Loci septimi, qui quidem non habet limites, adeoque manifesta est compositio.

Cas. IV. (Fig. 5. 6. 7. 8.) Ducatur jam, ad modum quartum, recta HN auferens rationem ΓN ad AZ datam. Quoniam ratio ΓN ad $\Theta\Sigma$ datur, etiam ratio $\Sigma\Theta$ ad AZ data est; unde recta HN positione datur. Reducitur enim ad Casum quartum Loci septimi.

Determinatur autem problema hunc in modum. Manentibus prius descriptis, capiatur media proportionalis inter $Z\Theta$ et ΘK . Haec vel minor erit recta ΘM , vel non minor eâ: ac primo non sit minor eâ. Junge HM , ac dico quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ , majorem quavis ratione, a rectâ qualibet per punctum H ductâ ipsique ΓM occurrente, abscissa. Ducatur enim alia ut HN . Quoniam me-

dia proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK non est minor quam ΘM ; recta HM vel auferet rationem $\Theta\Delta$ ad ZM maximam, vel propior erit rectae rationem maximam auferenti: adeoque ratio $\Delta\Theta$ ad ZM major erit ratione $\Theta\Sigma$ ad AZ ; permutando autem $\Delta\Theta$ ad $\Theta\Sigma$ major erit ratione ZM ad AZ . Sed $\Delta\Theta$ est ad $\Theta\Sigma$ ut est $M\Gamma$ ad ΓN ; quare ratio $M\Gamma$ ad ΓN major erit ratione MZ ad AZ : ac permutando iterum, ratio $M\Gamma$ ad MZ major erit ratione ΓN ad AZ . Recta igitur HM aufert rationem ΓM ad MZ , majorem quavis ratione quam aufert recta quaelibet alia per punctum H ducta ipsique ΓM occurrens. Q. E. D.

Sit jam media proportionalis inter $Z\Theta$ et ΘK minor quam ΘM , ut ΘA . Jungantur HM , HA , ac producat HA ad Δ . Dico quod recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad AZ , majorem quavis alia ratione, quam abscindit recta quaelibet per H ducta, totique rectae ΓM occurrens: quodque recta HM aufert rationem ΓM ad MZ , minorem quavis alia recta ipsi ΔM occurrente. Ducantur enim rectae duae ut $H\Pi$, HB . Quoniam autem ΘA media proportionalis est inter $Z\Theta$, ΘK , auferet recta HA rationem ΘN ad AZ maximam. Est igitur ratio ΘN ad AZ major ratione $\Sigma\Theta$ ad ZO ; et permutando ratio ΘN ad $\Sigma\Theta$ major erit ratione AZ ad ZO . Sed $N\Theta$ est ad $\Theta\Sigma$ ut $\Delta\Gamma$ ad ΓB , quae proinde ratio major est ratione AZ ad ZO : permutando autem ratio $\Delta\Gamma$ ad AZ major erit ratione ΓB ad ZO . Ac pari modo demonstratur rationem illam majorem esse ratione $\Gamma\Pi$ ad PZ . Quapropter recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad AZ , majorem omnibus rationibus à rectis per H ductis rectaeque ΓM occurrentibus, abscissis. Dico

praeterea quod recta HM aufert rationem ΓM ad MZ , minorem ratione quacunque, à rectâ quâvis per H ductâ, ipsamque ΔM intersecante, abscissâ. Quoniam enim (Fig. 6.) recta $H\Pi$ propior est ipsi $H\Delta$, maximam rationem auferenti, quam est recta HM ; ac rectae quae propiores sunt illi semper abscindunt rationes majores: igitur ratio ΘE ad PZ major erit ratione $\Lambda \Theta$ ad MZ . Permutando autem ratio $E\Theta$ ad ΘA major erit ratione PZ ad ZM . Sed $E\Theta$ est ad ΘA ut $\Pi\Gamma$ ad ΓM ; ratio igitur $\Pi\Gamma$ ad ΓM major erit ratione PZ ad ZM : ac permutando ratio $\Pi\Gamma$ ad PZ major erit ratione ΓM ad MZ . Quocirca recta $H\Delta$ aufert rationem $\Gamma\Delta$ ad AZ , majorem quavis ratione quam abscindere potest recta aliqua alia per H ducta, ita ut rectis ΓM , ΔM occurrat. Recta vero HM aufert rationem minorem quâvis aliâ rectam ΔM solam intersecante.

Sic autem componetur problema hoc. Maneant jam descripta; ac media proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK vel minor erit quam $M\Theta$; vel non erit minor eâ. Imprimis autem non sit minor ea. Junge HM ; ac recta HM abscindet rationem ΓM ad MZ , majorem quam recta quaevis per H ducta ipsamque ΓM intersecans. Igitur si ratio ad construendum data fuerit aequalis rationi ΓM ad MZ ; recta HM eaque sola solvit problema. Si vero ratio minor fuerit, construetur problema unico tantum modo. Quod si (Fig. 7.) ratio data, quae sit ut P ad T , minor fuerit ratione ΓM ad MZ , fiat ut ΓH ad $H\Theta$ ita P ad Ξ ; ac demonstrari potest ex aequo, quod ratio Ξ ad T minor erit ratione $\Lambda \Theta$ ad MZ : unde patet quod possibile sit per punctum H ducere duas rectas, quae

auferant à rectis ΓM , MZ rationem aequalem rationi Ξ ad T . Hae si ducantur, cadent ab utraque parte ipsius HM ; ac manifestum est alteram ex his rectis ut HO , quae per punctum H transit ac producta occurrit ipsi ΓM , solvere problema; alteram vero non item: adeoque unico tantum modo efficitur. Q. E. D.

Jam sit (Fig. 8.) media proportionalis inter $Z\Theta$ et ΘK minor quam recta ΘM ; sit ea ΘN . Junge rectas HM , HN ; et producat HN ad Σ ; ac recta haec $H\Sigma$ auferet rationem $\Gamma\Sigma$ ad NZ , majorem quavis, quae resecari possit à rectis per punctum H ductis, ipsique ΓM occurrentibus. Recta vero HM auferet rationem ΓM ad MZ , minorem quavis ratione à rectis per H ductis, ipsique ΣM soli occurrentibus, abscissâ. Propositâ autem ratione construendâ, quae aequalis sit rationi $\Gamma\Sigma$ ad NZ ; manifestum est quod sola recta $H\Sigma$ solvet problema. Si ratio proposita major fuerit ea, tum componi non potest. Quod si minor fuerit ratione $\Gamma\Sigma$ ad NZ , major vero quam ΓM ad MZ ; hoc in casu dupliciter solvi potest problema per praecedentia: à rectis scilicet ab utrâque parte ipsius $H\Sigma$ ducendis, ipsisque $\Gamma\Sigma$, ΣM occurrentibus. Quod si ratio data aequalis fuerit rationi ΓM ad MZ ; constat etiam ex determinatione praemissâ, quod duobus modis solvi possit, nempe rectâ HM , ac rectâ aliâ ut HP . Si vero ratio minor fuerit quam ΓM ad MZ ; tum cadet altera è rectis ultra ipsam HM , adeoque non satisfaciet problemati. Manifesta autem sunt haec omnia ex iis quae jam pridem demonstravimus.

Cas. V. (Fig. 9. 10.) Ducatur jam recta HA , juxta Casum quintum, auferens rationem $\Gamma\Delta$ ad ΛZ datam. Quoniam ratio $\Gamma\Delta$ ad ΘN datur, ratio etiam $N\Theta$ ad ΛZ datur; unde recta quoque HA positione data est, per demonstrata in Casu quarto Loci septimi, qui quidem determinationem habet. Determinatur autem hunc in modum. Quoniam media proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK , vel major esse potest quam recta ΘM , vel minor eâ; primum non sit major eâ. Junge HM , ac manifestum est ex limitationibus praecedentibus, quod recta HM auferet rationem ΓM ad MZ majorem rationibus omnibus, à rectis per punctum H ductis rectaeque AM occurrentibus, abscissis. Si vero media proportionalis inter $Z\Theta$, ΘK major sit quam recta ΘM ; ut est recta $\Theta\Lambda$: jungantur HA , HM ; ac patet ex limitationibus praecedentibus, quod recta HA auferet rationem $\Gamma\Delta$ ad ΛZ , majorem omni ratione, quam auferunt rectae quaevis per H ductae, ipsique $AM\Theta$ occurrentes. Recta vero HM auferet rationem ΓM ad MZ , minorem quavis ratione, à rectis per H ductis, solique rectae AM occurrentibus, abscissâ. Q. E. D.

Componetur autem problema hunc in modum. Manentibus jam descriptis, erit media proportionalis inter $Z\Theta$ et ΘK , vel major quam ΘM , vel non major ea. Primo autem non sit major eâ. Junge HM auferentem rationem ΓM ad MZ , majorem omni ratione, à rectis per H ductis, ipsique AM occurrentibus, abscissâ: ac si fuerit ratio ad componendum data ut ΓM ad MZ , sola recta HM solvit problema. Si major fuerit eâ, tum construi non potest. Quod si ratio minor fuerit eâ, ex praecedentibus constat

unam solam rectam duci posse, quae occurrens ipsi ΛM problemati satisfaciat. Q. E. D.

Quod si $\Theta \Lambda$, media proportionalis inter $Z \Theta$ et ΘK , major fuerit quam ΘM ; jungantur HM , $H\Lambda$; ac recta $H\Lambda$ auferet rationem $\Gamma \Delta$ ad ΛZ , majorem omni ratione quam abscindunt rectae aliae per H ductae, ipsique ΘM continuatae occurrentes: recta vero HM auferet rationem minimam, nempe rationem ΓM ad MZ . Jam si proponatur ratio ad construendum, quae fuerit ut $\Gamma \Delta$ ad ΛZ ; patet quod recta $H\Lambda$ sola solvet problema: ac si major fuerit ratio, non construetur. Quod si minor fuerit ratione $\Gamma \Delta$ ad ΛZ , major vero quam ΓM ad MZ , manifestum est ex praemissis, problema effici posse duobus modis; ductis rectis, ab utraque parte ipsius $H\Lambda$, rectae ΛM occurrentibus. Si vero minor fuerit ratione ΓM ad MZ , ex praecedentibus limitationibus constat, unico solum modo solvi posse problema; scilicet recta ipsam ΛM intersecante. Denique si ratio aequalis fuerit rationi ΓM ad MZ , duplicem habebit solutionem. Recta enim HM , atque etiam alia ipsi ΛM occurrens ultra punctum Λ , rem praestant. Totum hoc patet ex prius demonstratis.

Inhaltsanzeige.

Die Bücher des Apollonius de sectione rationis enthalten die Bearbeitung folgender Aufgabe:

- » Von einem, ausserhalb zweyer der Lage nach gegebenen geraden Linien, in der durch dieselben bestimmten Ebene, gegebenen Punkte eine gerade Linie zu ziehen, so
- » dass die zwischen ihren Durchschnittspunkten mit jenen
- » Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten
- » liegenden Segmente ein gegebenes Verhältniss zu einander haben «

und behandeln dieselbe in folgender Ordnung.

- I.) Die gegebenen Linien sind parallel, (lib. I. loc. I. II.) Der gegebene Punkt liegt

A.) nicht zwischen den gegebenen Linien. (loc. I. Fig. 1–3.)

B.) zwischen — — — (loc. II. Fig. 4–7.)

II.) Die gegebenen Linien AB , CD sind nicht parallel. (lib. I. loc. III–VII. lib. II. loc. I–XIV.) Die in denselben gegebenen Punkte liegen

A.) beide im Durchschnittspunkte. (lib. I. loc. III. Fig. 8–11.)

B.) nicht beide im Durchschnittspunkte E . (lib. I. loc. IV–VII. lib. II. loc. I–XIV.)

a.) Der auf AB gegebene Punkt liegt in E (lib. I. loc. IV–VII.),
der auf CD gegebene

α .) auf EC . (lib. I. loc. IV. Fig. 12, 13.)

β .) auf ED . (lib. I. loc. V–VII.)

κ .) in K , wenn $OK \nparallel AB$. (lib. I. loc. V. Fig. 14–16.)

λ .) zwischen E , K . (lib. I. loc. VI. Fig. 17–21.)

μ .) auf der Verlängerung von KE . (loc. VII. Fig. 22–26.)

b.) Keiner liegt im Durchschnittspunkt I . (lib. II.) Der auf
 AB gegebene Punkt liegt

ν .) auf IB (loc. I–VI.), der auf CD gegebene

α .) auf IC . (loc. I. Fig. 27–29.)

β .) auf ID . (loc. II–VI.)

κ .) in K . (loc. II. Fig. 30–39.)

2.) auf der Verlängerung von IK. (loc. III. Fig. 40–49.)

1.) auf IK. (loc. IV–VI.)

1.) zwischen E, K, wenn E der Durchschnitt
der Linien OF, CD ist. (loc. IV. Fig. 50–60.)

2.) zwischen E, I. (loc. V. Fig. 61–65.)

3.) in E. (loc. VI. Fig. 66–69.)

2.) auf IA. (loc. VII–XIV.)

α.) in a, wenn a der Durchschnitt der Linie Oa ($\parallel$ CD)
mit AB ist. Der auf CD gegebene Punkt liegt

N.) auf IC. (loc. II.)

2.) auf ID. (loc. VII–IX.)

1.) in K. (loc. VII. Fig. 70–72.)

2.) auf der Verlängerung von IK. (loc. VIII.
Fig. 73–75.)

3.) auf KI. (loc. IX. Fig. 76–79.)

β.) auf der Verlängerung von Ia. Der auf CD gegebene
Punkt liegt

N.) auf IC. (loc. III.)

2.) auf ID. (loc. VIII, XI–XIV.)

1.) in K. (loc. VIII.)

2.) auf der Verlängerung von IK. (loc. XI–XIII.)

aa.) in E (loc. XI. Fig. 80–84.), wenn E der
Durchschnitt der Linien OF, CD ist.

bb.) auf KE. (loc. XII. Fig. 84 — 89.)

cc.) auf der Verlängerung von KE. (loc. XIII.
Fig. 90 — 92.)

3.) auf KI. (loc. XIV. Fig. 93 — 98.)

γ.) auf Ia. Der auf CD gegebene Punkt liegt

α.) auf IC. (loc. IV. V. VI.)

β.) auf ID. (loc. IX. XIV. X.)

1.) in K. (loc. IX.)

2.) auf der Verlängerung von IK. (loc. XIV.)

3.) auf IK. (loc. X. Fig. 99 — 104.)

Lehnsatz A. Aufgabe. (Fig. a.)

Eine gegebene gerade Linie AB in einem Punkte C so zu schneiden, daß das Rechteck aus den Segmenten AC , CB dem Rechtecke aus zwey gegebenen geraden Linien P , Q gleich sey.

Auflösung.

Man mache $BAD = ABE = R$ auf einerley Seite von AB , $AD = P$, $BE = Q$, ziehe DE , beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und errichte auf der Linie DE in dem Punkte F , in welchem der Kreis diese Linie erreicht, ein Perpendikel. Der Punkt C , in welchem dasselbe der Linie AB begegnet, wird das Verlangte leisten.

Determination.

Damit der Halbkreis der Linie DE begegne, muß (Fig. a. 2.) ein von dem Mittelpunkte O auf DE gefälltes Perpendikel $OL < \frac{1}{2}AB$ seyn. (El. I. 19.)

Macht man $AOH = R$, und zieht durch den Durchschnitt H der OH mit DE die Linie $HQ \# AB$,

$$\text{so ist } HO : OL = DH : \begin{cases} HQ \text{ (El. VI. 4.)} \\ AO \text{ (El. I. 34.)} \\ \frac{1}{2} AB \end{cases}$$

$$\text{also mu\u00df } OH \stackrel{=}{<} HD \text{ seyn (El. V. 14.)}$$

$$\text{folglich } OH^2 \stackrel{=}{<} \begin{cases} HD^2 \\ \frac{1}{4} DE^2 \text{ (El. VI. 2.)} \\ \frac{EN^2 + ND^2}{4} \text{ (El. I. 47.), wenn } EN \nparallel AB, \\ \frac{AB^2 + (AD - BE)^2}{4} \text{ (El. I. 34.)} \end{cases}$$

$$\text{mithin } (AD + BE)^2 \stackrel{=}{<} AB^2 + (AD - BE)^2$$

$$\text{somit } \begin{cases} (AD + BE)^2 - (AD - BE)^2 \\ \text{(El. II. 4. 7.) } 4 AD \cdot BE \end{cases} \stackrel{=}{<} AB^2$$

$$\text{demnach } AD \cdot BE \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} AB^2$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AD \cdot BE \stackrel{=}{<} \frac{1}{4} AB^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \begin{cases} 4 AD \cdot BE \\ (AD + BE)^2 - (AD - BE)^2 \end{cases} \stackrel{=}{<} AB^2$$

$$\text{folglich } \begin{cases} \frac{(AD + BE)^2}{4} \\ OH^2 \end{cases} \stackrel{=}{<} \begin{cases} \frac{AB^2 + (AD - BE)^2}{4} \\ \frac{EN^2 + ND^2}{4} \\ \frac{1}{4} DE^2 \\ HD^2 \end{cases}$$

mithin $OH = HD$
 Nun ist $HO : OL = DH : \begin{cases} HQ \\ AO \end{cases}$

demnach $LO = \begin{cases} OA \\ \frac{1}{2} AB \end{cases}$

Der Halbkreis berührt also (Fig. a. 1.), oder schneidet (Fig. a. 2.) die Linie DE. In beiden Fällen ist $AFB = R$ (El. III. 31.)

also $AFD < R$, $BFD > R$

folglich $DFC > DFA$, $DFC < DFB$

mithin fällt FC zwischen AF, FB

somit liegt C zwischen A, B.

Ferner ist $DAF = CBF$ (El. III. 32.), $DFC = AFB$

demnach $AFD = CFB$

folglich $DA : AF = CB : BF$ (El. VI. 4.)

Auch ist $EBF = FAC$ (El. III. 32.), $EFC = AFB$

somit $EFB = AFC$

folglich $FA : AC = FB : BE$

mithin $DA : AC = CB : BE$ (El. V. 22.)

demnach $AC \cdot CB = \begin{cases} AD \cdot BE \\ P \cdot Q \end{cases}$ (El. VI. 16.)

Zus. Es erhellet von selbst (Fig. a. 2.), daß ein zweiter Durchschnitt des Halbkreises mit der Linie DE einen zweiten Punkt C' mit der gegebenen Eigenschaft auf der Linie AB bestimme.

Lehns. B. Aufg. (Fig. b.)

Auf der Verlängerung einer gegebenen geraden Linie AB einen Punkt C zu bestimmen, so daß das Rechteck aus den Segmenten AC , CB dem Rechtecke aus zwey gegebenen geraden Linien P , Q gleich sey.

Auflösung.

Man mache $BAD = ABE = R$ auf verschiedenen Seiten der Linie AB , $AD = P$, $BE = Q$, ziehe DE , beschreibe über AB als Durchmesser einen Kreis, und errichte in dem Punkte F , in welchem derselbe die Linie DE schneidet, ein Perpendikel auf DE . Der Punkt, in welchem dasselbe die Verlängerung von AB erreicht, wird das Verlangte leisten.

Beweis.

Es ist $DFC = R$, $DFB < R$ (El. III. 31.)

also $DFC > DFB$

— folglich liegt C in der Verlängerung von AB .

Ferner ist $DAF = CBF$ (El. III. 32.22.), $DFC = AFB$

also $AFD = CFB$

folglich $DA : AF = CB : BF$

Auch ist $EBF = FAC$, also $\frac{EFC = AFB}{EFB = AFC}$

folglich $FA : AC = FB : BE$

mithin $DA : AC = CB : BE$

somit $AC, CB = \begin{cases} AD, BE \\ P, Q. \end{cases}$

Zus. Es erhellet von selbst, daß der zweite Durchschnitt F des Kreises mit DE einen zweiten Punkt C' auf der verlängerten BA bestimme, welcher das Verlangte leistet.

BUCHER DES APOLLONIUS VON PERGA

de sectione rationis

Von einem oder mehrer der Lage nach gegebenen geraden Linien, in der durch dieselben gelegten Ebene, gegebenen Punkte eine gerade Linie zu ziehen, so daß die zwischen ihren Durchschnittspunkten mit denselben Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten liegenden Segmente ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Die
BÜCHER des APOLLONIUS von PERGA
de sectione rationis.

A u f g a b e.

Von einem, außerhalb zweyer der Lage nach gegebenen geraden Linien, in der durch dieselben gelegten Ebene, gegebenen Punkte eine gerade Linie zu ziehen, so daß die zwischen ihren Durchschnittspunkten mit jenen Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten liegenden Segmente ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

F a l l .

Die verlangten Segmente sollen liegen auf den Linien FD , FE . (Fig. 1.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte Linie, ihre Durchschnittspunkte mit AB , CD seyen G , H , so ist, wenn die gerade Linie OE gezogen wird, welche die Linie CD in L schneidet,

BÜCHER DES APOLLONIUS VON PERGA

de sectione rationis

Aufgabe

Von einem ansehnlich zweyer der Lage nach
 gegebenen Geraden Linien, in der durch die-
 selben gezogen Ebene, gegebenen Punkte eine
 Gerade Linie zu ziehen, so daß die zwischen
 ihren Durchschnittspunkten mit jenen Linien und
 zweyen in denselben gegebenen Punkten liegen-
 den Segmente ein gegebenes Verhältniß zu ein-
 ander haben.

ERSTES BUCH.

Die gegebenen Linien sind parallel, oder es liegen, wenn sie nicht parallel sind, die in denselben gegebenen Punkte nicht beide aufserhalb ihres Durchschnittspunktes. (Fig. 1 — 26.)

I) Die gegebenen Linien AB, CD sind parallel. (Fig. 1—7.) Die gegebenen Punkte seyen E, F .

1) Der aufserhalb der Linien gegebene Punkt O liegt innerhalb des Winkels DFR . (Fig. 1—3.). (Loc. I.)

Fall 1.

Die verlangten Segmente sollen liegen auf den Linien FD, EB . (Fig. 1.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte Linie, ihre Durchschnittspunkte mit AB, CD seyen G, H , so ist, wenn die gerade Linie OE gezogen wird, welche die Linie CD in L schneide,

$$\underline{EG : LH = EO : OL \text{ (El. VI. 4.)}}$$

also ist $EG : LH$ gegeben (Dat. 29. 1.) *)

Da $EG : FH$ gegeben ist (p. hyp.)

so ist $FH : HL$ (Dat. 9.)

folglich auch $FH - HL : LH$ gegeben (Dat. 6. Zus.)

mithin ist LH (Dat. 2.)

somit der Punkt H (Dat. 30.), und die gerade Linie OH der Lage nach (Dat. 29.) gegeben.

Determination.

Da $FH > HL$

so ist $EG : FH < \begin{cases} EG : HL \text{ (El. V. 8.)} \\ EO : OL \end{cases}$

also muß das gegebene Verhältniß $p : q < EO : OL$ seyn.

Construction.

Man ziehe EF , mache $OK \parallel CD$, $UF = FK$, $UV \parallel EF$, $TE = EV$, $FP = p$, $FQ = q$, $QR \parallel TP$, $LM \parallel EF$, ziehe RM , welche in H die CD schneide, so ist OH die gesuchte Linie.

Beweis.

Es ist $p : q < \begin{cases} EO : OL \text{ (Det.)} \\ EK : KF \text{ (El. VI. 2.)} \end{cases}$
 (El. VI. 4.) $\begin{cases} PF : FQ \\ TF : FR \\ EK \end{cases}$

also $RF > \begin{cases} FK \text{ (El. V. 10.)} \\ LM \end{cases}$

*) Die Citationen der Data des Euclides beziehen sich auf die von Schwab, Stuttgart, 1780 veranstaltete deutsche Ausgabe.

folglich schneidet RM die Verlängerung von FL.

Und es ist $EG : HL = EO : OL$ (El. VI. 4.)

$$= \left\{ \begin{array}{l} EK \\ TF \end{array} \right\} : KF \quad (\text{El. VI. 2.})$$

Auch ist $LH : HF = LM : FR$ (El. VI. 4.)

mithin $EG : HF = TF : FR$ (El. V. 22.)

$$= p : q.$$

Zusatz 1. (Apoll.)

Für eine andere gerade Linie OW, welche die EB, LD in W, X schneide, ist

$$XH : HL > XH : HF \quad (\text{El. V. 8.})$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} LH + HX \\ XL \end{array} \right\} : LH \left\{ \begin{array}{l} FH + HX \\ XF \end{array} \right\} : FH \quad (\text{Proposit. de ration. inter se diversis demonstrat. ed. Hauber, Tubingae, 1793. §. 28-19.})$$

$$\text{folglich } WE : FX \left\{ \begin{array}{l} EG : FH \\ p : q \end{array} \right. \quad (\text{Hauber. §. 43.})$$

mithin bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie LD kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zusatz 2.

Verlängert man ML, so daß $M'L = LM$, und zieht RM', welche die Linie CD in H' schneide, so ist, wenn die die Linie AB in G' schneidende gerade Linie OH' gezogen wird, $EG' : H'L = EO : OL$

$$= \left\{ \begin{array}{l} EK \\ TF \end{array} \right\} : KF$$

Auch ist $LH' : H'F = LM' : FR$

also $EG' : HF = TF : FR$

$$= p : q$$

mithin ist eine Linie OG' gefunden, welche von den Linien EA , FD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 2.

Die verlangten Segmente sollen liegen auf den Linien EA , FD . (Fig. 2. a. b. c.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte Linie, ihre Durchschnitte mit AB , CD seyen G , H , so ist, wenn man die die Linie CD in L schneidende gerade Linie EO zieht, $EG : LH = EO : OL$ (El. VI. 4.)

also ist $EG : LH$ gegeben (Dat. 29. 1.)

Da $EG : FH$ gegeben ist (p. hyp.)

so ist $FH : HL$ (Dat. 9.)

also auch $FH + HL : LH$ gegeben (Dat. 7.)

folglich ist LH (Dat. 2.), mithin der Punkt H (Dat. 30.), somit die gerade Linie OH der Lage nach gegeben (Dat. 29.)

Construction.

Man mache $OK \parallel CD$, $UF = FK$, $UV \parallel EF \parallel LM$, $TE = EV$, $FP = p$, $FQ = q$, $QR \parallel TP$, $FM \parallel KL$, und ziehe RM , welche die CD in H schneide, so ist OHG die gesuchte Linie.

Beweis.

Es ist $EG : HL = EO : OL$ (El. VI. 4.)

$$= \begin{cases} EK \\ TF \end{cases} : KF \quad (\text{El. VI. 2.})$$

Auch ist $LH : HF = LM : FR$ (El. VI. 4.)

$$\text{also } EG : HF = TF : FR \quad (\text{El. I. 34. V. 22.})$$

$$= p : q$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere gerade Linie QW, welche die Linien EA, FL in W, X schneide, ist

$$WE \geq EG \quad XF \leq FH$$

$$\text{also } WE : FX \geq \begin{cases} EG : FH \\ p : q \end{cases} \quad (\text{Hauber §.10.43.})$$

folglich bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FL größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Verlängert man ML bis zum Durchschnitt mit OK in M', und zieht OM', so bestimmt, wenn nicht, wie Fig. 2. c., $RM' \nparallel CD$, d. h. wenn nicht

$$\begin{cases} TF : FR \\ PF : FQ \\ p : q \end{cases} = \begin{cases} TF : LM' \\ EK : KF \\ EO : OL \end{cases}$$

OG' zwey andere Segmente EG', F'H auf den Linien EB, FD (Fig. 2. a.), oder auf den Linien EA, FC (Fig. 2. b.) mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 1., oder Fall 3. ist.

Fall 3.

Die verlangten Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FC (Fig. 3.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte Linie, ihre Durchschnittspunkte mit AB, CD seyen G, H, so ist, wenn die die Linie CD in L schneidende gerade Linie OE gezogen wird,

$$\underline{EG : LH = EO : OL} \quad (\text{El. VI. 4.})$$

also ist EG : LH gegeben (Dat. 29. 1.)

Da EG : FH gegeben ist (p. hyp.)

so ist FH : HL (Dat. 9.)

folglich auch $\underline{LH - HF : FH}$ gegeben (Dat. 6. Zus.)

mithin ist FH (Dat. 2.), somit der Punkt H (Dat. 30.), und die gerade Linie OH der Lage nach gegeben (Dat. 29.).

Determination.

Da $FH < HL$

so ist $EG : FH > \begin{cases} EG : HL & (\text{El. V. 8.}) \\ EO : OL & (\text{El. VI. 4.}) \end{cases}$

also muß $p : q > EO : OL$ seyn.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Beweis.

Es ist $p : q \begin{cases} > EO : OL & (\text{Det.}) \\ > EK : KF & (\text{El. VI. 2.}) \end{cases}$
 (El. VI. 4.) $\begin{cases} TF \\ EK \end{cases} : FR$

also $RF < \begin{cases} FK \\ LM \end{cases}$ (El. V. 10.)

folglich schneidet MR die Verlängerung von LF.

Und es ist $EG : HL = EO : OL$

$$= \begin{cases} EK \\ TF \end{cases} : KF$$

Auch ist $LH : HF = LM : FR$

$$\text{mithin } EG : HF = TF : FR \\ = p : q$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere gerade Linie OW, welche die EA, FC in W, X schneide, ist

$$XH : HL < XH : HF \quad (\text{El. V. 8.})$$

$$\text{also } \begin{cases} LH + HX \\ XL \end{cases} : LH \begin{cases} < \\ > \end{cases} \begin{cases} FH + HX \\ XF \end{cases} : FH \quad (\text{Hauber } \S. 19. 22.) \\ (\text{El. VI. 4.}) \quad WE : EG$$

$$\text{folglich } WE : FX \begin{cases} < \\ > \end{cases} \begin{cases} EG : FH \\ p : q \end{cases} \quad (\text{Hauber } \S. 43.)$$

mithin bestimmen die dem Punkte F näher liegenden Punkte der Linie FC grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchstäblich, wie Fall 1. Zus. 2.

Anm. zu loc. I.

Die in loc. I. enthaltene Aufgabe kann also, wenn das gegebene Verhältniss $p : q$ $\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases}$ $EO : OL$ nach Fall $\begin{cases} 1. 2. \\ 2. \\ 2. 3. \end{cases}$ aufgelöst werden. $\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases}$

2) Der Punkt O liegt innerhalb der Winkel BEF, EFD. (Fig. 4—6.) (Loc. II.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EB, FD. (Fig. 4. a. b. c.)

Anal.	}	Buchstäblich, wie zu loc. I. Fall	(2.)
Constr.			
Bew.			

Zus. 1. (Apoll.)

Buchstäblich, wie Fall 2. Zus. 1.

Zus. 2.

Macht man auch $LM' = LM$, und zieht RM' , so schneidet dieselbe, wenn nicht $RM' \parallel FD$, d. h.

wenn nicht $TF : FR = TF : LM'$, wie Fig. 4. c.,

$PF : FQ = EK : KF$

$p : q = EO : OL$

die Linie CD in einem Punkte H', und die gerade Linie OH' bestimmt zwey Segmente EG', FH' auf den Linien EA, FD (Fig. 4. a.), oder auf den Linien EB, FC (Fig. 4. b.) mit der gegebenen Eigenschaft, welches Fall 2., oder Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FD. (Fig. 5.)

Anal. Det.	}	Buchstäblich, wie zu loc. I. Fall	(1.)
Constr.			
Bew.			

Zus. 1.

Für eine andere gerade Linie OW, welche die Linien EA, FD in W, X schneide, ist

$$XH:HL > XH:HF$$

u. s. w. wie loc. I. Fall 1. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst. wie loc. I. Fall 1. Zus. 2. wird eine Linie OG' gefunden, welche von den Linien EB, FD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EB, FC . (Fig. 6.)

Anal.	{	Buchstäblich, wie zu loc. I. Fall	{	3.
Det.				3.
Constr.				2.
Bew.				3.

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere gerade Linie OW , welche die Linien EB, FC in W, X schneide, ist

$$XH:HL < XH:HF$$

u. s. w. wie loc. I. Fall 3. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst. wie zu loc. I. Fall 2. Zus. 2.

Anm. zu loc. II.

Die in loc. II. enthaltene Aufgabe kann also,

wenn das gegebene Verhältniß $p:q$ $\left\{ \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} \right\} EO.OL$
 nach Fall $\left\{ \begin{matrix} 1. \\ 1. 3. \\ 1. 2. \end{matrix} \right\}$ aufgelöst werden.

Anm. zu I. (Halley). (Fig. 7.)

Wenn AB, CD zwey der Lage nach gegebene parallele Linien, E, F in denselben gegebene Punkte sind, auch $p : q$ ein gegebenes Verhältniß bezeichnet, und man macht $EP = p, QF = q$, zieht PQ , welche die gerade Linie EF , oder ihre Verlängerung in S schneide, zieht auch durch S und einen außerhalb, oder innerhalb der Parallelen gegebenen Punkt O die gerade Linie SO , welche die Parallelen in H, G schneide, so ist

$$EG : FH = ES : SF \quad (\text{El. VI. 4.})$$

$$= EP : FQ \quad (\text{El. VI. 4.})$$

$$= p : q$$

Sämmtliche unter I. begriffene Fälle lassen sich also auch auf diesem Wege behandeln. Auch wird ESS in den mittleren Punkten F, S harmonisch geschnitten.

II.) Die gegebenen Linien sind nicht parallel. (Fig. 8—27.)

1) Die in beiden Linien gegebenen Punkte liegen im Durchschnittspunkte. (Fig. 8—11.). (Loc. III.)

Fall I.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien CE, EA . (Fig. 8.)

Analysis.

Es sey OG die gesuchte gerade Linie, so ist, wenn eine durch O der AB parallel gezogene gerade Linie OK der Linie CD in K begegnet,

$$OK : KG = HE : EG \text{ (El. VI. 4.)}$$

$$= p : q$$

also ist das Verhältniß $OK : KG$ ein gegebenes. Da OK (Dat. 31. 22.) der Lage und Gröfse nach gegeben ist, so ist KG (Dat. 2.) der Gröfse nach, somit der Punkt G (Dat. 30.), und die gerade Linie OG der Lage nach gegeben (Dat. 29.).

Determination:

Da $GK > KE$

so ist $OK : KG < OK : KE$ (El. V. 8.)

also muß $p : q < OK : KE$ seyn.

Construction.

Man mache $OK \# AB$, $EP = p$, $EQ = q$, $OG \# PQ$, so sind, wenn der Durchschnitt der Linien AB , OG mit H bezeichnet wird, HE , EG die gesuchten Segmente.

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ PE : EQ \\ \text{(El. VI. 4.) } OK : KG \end{array} \right\} < OK : KE \text{ (Det.)}$$

also $KG > KE$ (El. V. 10.)

Der Punkt G liegt mithin auf der Linie EC .

Ferner ist $HE : EG = PE : EQ$

$$= p : q$$

Zus. (Apoll.)

Für eine andere die Linien EC , EA in L , M schneidende gerade Linie OL ist $LK \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} KG$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{OK} : \text{KL} \\ \text{ME} : \text{EL} \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{OK} : \text{KG} \\ \text{HE} : \text{EG} \end{array} \right. \text{ (El. V. 8.)}$$

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie CE bestimmen mithin grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 2.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien DE, EB. (Fig. 9.)

Analysis.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Da $\text{GK} < \text{KE}$

so ist $\text{OK} : \text{KG} > \text{OK} : \text{KE}$ (El. V. 8.)

also muß $p : q > \text{OK} : \text{KE}$ seyn.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ \text{PE} : \text{EQ} \\ \text{(El. VI. 4.) } \text{OK} : \text{KG} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} > \text{OK} : \text{KE} \\ > \text{OK} : \text{KE} \\ > \text{OK} : \text{KE} \end{array} \right.$$

also $\text{KG} < \text{KE}$

Der Punkt G liegt mithin auf der Linie KE.
Ferner ist $\text{HE} : \text{EG} = \text{PE} : \text{EQ}$
 $= p : q$

Zus. (Apoll.)

Für eine andere die Linien ED, EB in L, M schneidende gerade Linie OM ist $LK \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} KG$

$$\text{also } \begin{array}{l} OK : KL \\ ME : EL \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} \begin{array}{l} OK : KG \text{ (El.V.8.)} \\ HE : EG \end{array}$$

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie EK bestimmen also kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 3.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien AE, ED. (Fig. 10.)

Analysis. Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } HE : EG &= PE : EQ \\ &= p : q \end{aligned}$$

Zus. (Apoll.)

Für eine andere die Linien AE, ED in M, L schneidende gerade Linie OL ist $LK \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} KG$

$$\text{also } \begin{array}{l} OK : KL \\ ME : EL \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} \begin{array}{l} OK : KG \text{ (El.V.8.)} \\ HE : EG \end{array}$$

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie KD bestimmen mithin grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Anm. zu loc. III. (Apoll.)

Die in loc. III. enthaltene Aufgabe kann also,
 wenn das gegebene Verhältniß $p : q$ $\left\{ \begin{array}{l} < \\ > \\ = \end{array} \right\} OK : KE,$
 nach Fall $\left\{ \begin{array}{l} 1. 3. \\ 2. 3. \\ 3. \end{array} \right\}$ aufgelöst werden.

Anm. zu loc. III. (Halley.). (Fig. 11.)

Die 3 Fälle dieser Aufgabe lassen sich auch folgendermaßen behandeln.

Construction.

Man mache $EP = p$, $QE = Q'E = q$, ziehe PQ , PQ' , $OG \parallel PQ$, $OG' \parallel PQ'$.

Beweis.

Es ist, wenn H, H' die Durchschnittspunkte der Linien AB , und OG, OG' sind,

$$\begin{array}{ccc} HE : EG = PE : EQ & , & H'E : EG' = PE : EQ' \\ = p : q & & = p : q \end{array}$$

2) Der in der Linie AB gegebene Punkt ist der Durchschnittspunkt E der Linien AB, CD , (Fig. 12—26.). Der in der Linie CD gegebene Punkt F liegt

A.) auf der Linie EC . (Fig. 12—14.)
 (Loc. IV.)

Fall I.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien AE, FC . (Fig. 12.)

Analysis.

Es sey HG die gesuchte Linie. Macht man $OK \# AB$, und $OK : FS = p : q$

$$= HE : FG$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} OK : HE \\ KG : GE \end{array} \right\} = SF : FG$$

$$\text{also } \underline{GK : KE = FS : SG}$$

folglich $KG \cdot GS = KE \cdot FS$ (El. VI. 16.)

Da KE (Dat. 28.), FS (Dat. 2.) gegeben sind, so ist KG.GS der Gröfse nach, und da $KG + GS = KF + FS = KS$ gegeben ist, so ist KG (Dat. 86.), somit G (Dat. 30.) und die Lage der geraden Linie OG gegeben (Dat. 30.).

Construction.

Man mache $FN \# OK \# AB$, $ON \# CD$, $FP = p$, $FQ = q$, $NS \# PQ$, $FST = R = EKU$, $TS = SF$, $UK = KE$, beschreibe über SK als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie TU in R begegne, mache $TRG = R$, und ziehe durch O und den Durchschnitt G der Linie RG mit CD eine gerade Linie OG, welche AB in H schneide, so wird OG das Verlangte leisten.

Beweis.

Es ist $FS < SE$ (p. hyp.)

$$\text{also } \underline{FS \cdot EK < SE \cdot EK} \quad (\text{El. VI. 1.})$$

folglich $FS \cdot EK < \frac{1}{4} SK^2$ (El. II. 5.)

mithin schneidet der über KS beschriebene Halbkreis die Linie TU. (Lehns. A.)

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } SG.GK \} < \{ SE.EK \text{ (El. VI. 1.)} \\ \text{(Lehns. A.) } S\alpha^2 - \alpha G^2 \} \left\{ \begin{array}{l} S\alpha^2 - \alpha E^2 \text{ (El. II. 5.), wenn} \\ S\alpha = \alpha K \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{folglich } G\alpha^2 > \alpha E^2$$

$$\text{mithin } G\alpha > \alpha E$$

$$\text{somit } GK > KE$$

$$\text{demnach } FS > SG \text{ (El. VI. 16.)}$$

Der Punkt G liegt mithin zwischen S, F.

$$\text{Ferner ist } GK : KE = FS : SG$$

$$\begin{array}{l} \text{also } KG : GE \} = SF : FG \\ \quad \quad \quad OK : HE \} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } OK \} : FS \} = HE : FG \\ \quad \quad \quad NF \} \\ \quad \quad \quad PF : FQ \} \\ \quad \quad \quad p : q \} \end{array}$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien FS, EA in M, L schneidende gerade Linie OM ist

$$KE < KF$$

$$\begin{array}{l} \text{mithin } KE.FS \} < KF.FS \text{ (El. VI. 1.)} \\ \quad \quad \quad KG.GS \} \end{array}$$

$$\text{also } KM.MS \geq \left\{ \begin{array}{l} KG.GS \text{ (siehe Schol. in El. lib. II.} \\ KE.FS \text{ ed. Pfeiderer Tub. 1797.} \\ \quad \quad \quad \S. 38. und Conv.)} \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } MK:KE \geq FS:SM \text{ (Hauber §. 52.)}$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} \text{MK} : \{ \text{MK} - \text{KE} \\ \text{ME} \\ \text{OK} : \text{LE} \} \end{array} \right\} \leq \text{FS} : \left\{ \begin{array}{l} \text{FS} - \text{SM} \\ \text{FM} \end{array} \right. \text{ (Hauber §. 24.)}$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} \text{OK} : \text{FS} \\ \text{HE} : \text{FG} \end{array} \right\} \leq \text{LE} : \text{FM}$$

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie FS bestimmen also grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches die CD in G' schneide, so ist

$$\text{SG'.G'K} = \text{TS.KU} \\ = \text{FS.EK}$$

Nun ist $\text{FS} < \text{SE}$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{FS.EK} \\ \text{SG'.G'K} \\ \text{S}\alpha^2 - \alpha\text{G}^2 \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} \text{SE.EK} \\ \text{S}\alpha^2 - \alpha\text{E}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \text{G}'\alpha^2 > \alpha\text{E}^2$$

$$\text{folglich } \text{G}'\alpha > \alpha\text{E}$$

$$\text{mithin } \text{G'K} < \text{KE}$$

demnach liegt der Punkt G' zwischen K, E.

Ferner ist $\text{FS} : \text{SG}' = \text{G'K} : \text{KE}$

$$\text{folglich } \text{FS} : \left\{ \begin{array}{l} \text{G'S} - \text{SF} \\ \text{FG}' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{G'K} : \{ \text{EK} - \text{KG}' \\ \text{EG}' \} \\ \text{OK} : \text{H'E} \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{OK} : \text{SF} \\ \text{FN} \\ \text{p} : \text{q} \end{array} \right\} = \text{H'E} : \text{FG'}$$

Es ist mithin eine zweite Linie OH' gefunden, welche von den Linien DE , EB Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien AE , EF . (Fig. 13.)

Analysis.

Es sey HG die gesuchte Linie, so ist KG . GS der GröÙe nach gegeben, wie Anal. zu Fall 1. Da auch $KG - GS = KS$ gegeben ist, so ist KG (Dat. 85.), somit G (Dat. 30.) und die Lage der geraden Linie OG gegeben (Dat. 30.).

Construction.

Man mache $FN \parallel OK \parallel AB$, $KN \parallel OF$, $FP = p$, $FQ = q$, u. s. f., wie Constr. zu Fall 1.

Beweis.

Es ist $FK > KE$

$$\text{wenn } K\alpha = \alpha S, F\alpha^2 - \alpha S^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{also } KF \cdot FS > \left\{ \begin{array}{l} FS \cdot KE \text{ (El. VI. 1.)} \\ KG \cdot GS \text{ (Lehnsatz B.)} \\ G\alpha^2 - \alpha S^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

folglich $F\alpha^2 > G\alpha^2$

mithin $F\alpha > \alpha G$

somit $FS > SG$

Ferner ist $GK : KE = FS : SG$ (El. VI. 16.)

also $GK > KE$

mithin liegt der Punkt G zwischen F , E .

Auch ist $KG : GE = SF : FG$ (El. V. 17.)

somit $p : q = HE : FG$, wie Fall 1. Bew.

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien FE, EA in M, L schneidende gerade Linie OM ist

$$EL \geq EH, MF \leq FG$$

also $EL : FM \geq \begin{cases} EH : FG \\ p : q \end{cases}$ (Hauber §. 41.)

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie EF bestimmen also kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches die Linie CD in G' schneide, so ist

$$KG' \cdot G'S = FS \cdot EK$$

$$\text{also } G'K : KE = FS : G'S$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} G'K : G'E \\ OK : H'E \end{matrix} \right\} = FS : FG' \quad (\text{El. V. 18.})$$

wenn G'O die AB in H' schneidet,

$$\text{mithin } \left. \begin{matrix} OK : FS \\ p : q \end{matrix} \right\} = H'E : FG'$$

Demnach sind auch auf den Linien EA, FD zwey Segmente mit der gegebenen Eigenschaft gefunden worden, welches Fall 4. ist.

Fall 3.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien EB, FK. (Fig. 12.)

Analysis.

Es sey $H'G'$ die gesuchte Linie. Zieht man $OK \# AB$, und macht $OK : FS = p : q$

$$= H'E : FG'$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} OK : H'E \\ KG' : G'E \end{array} \right\} = FS : FG'$$

$$\text{also } KG' : KE = FS : G'S$$

$$\text{folglich } KG' \cdot G'S = EK \cdot FS$$

Da KE, FS gegeben sind, so ist $KG' \cdot G'S$, und da $KG' + G'S = KS$ gegeben ist, so ist KG' (Dat. 86.), somit G' und die Lage der geraden Linie OG' gegeben.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn man G', H', R' statt G, H, R setzt.

Beweis.

$$\text{Es ist } FS < SE$$

$$\text{also } FS \cdot EK < SE \cdot EK$$

$$\text{folglich } FS \cdot EK < \frac{1}{4} SK^2$$

mithin schneidet der Halbkreis die Linie TU (Lehns. A.).

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} SG' \cdot G'K \\ S\alpha^2 - \alpha G^2 \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} SE \cdot EK \\ S\alpha^2 - \alpha E^2 \end{array} \right\} \text{ (Lehns. A.)}$$

$$\text{wenn } K\alpha = \alpha S,$$

$$\text{folglich } G'\alpha^2 > E\alpha^2$$

$$\text{mithin } G'\alpha > E\alpha$$

demnach liegt G' zwischen E, K .

$$\text{Ferner ist } EK : KG' = G'S : SF \text{ (El. VI. 16.)}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} KG' : G'E \\ OK : H'E \end{array} \right\} = SF : FG' \text{ (El. V. 17.)}$$

$$\text{also } OK : H'E = SF : FG'$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK \\ FN \\ PF : FQ \\ p : q \end{array} \right\} : SF = H'E : FG'$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien EK, EB in M', L' schneidende gerade Linie OM' ist

$$KM' : M'S \gtrless \begin{cases} KG' : G'S \text{ (Pfleiderers Schol. in} \\ KE : FS \text{ El. II. § 38. u. Conv.)} \end{cases}$$

$$\text{also } M'K : KE \gtrless FS : SM' \text{ (Hauber §. 53.)}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} M'K : EM' \\ OK : L'E \end{array} \right\} \gtrless FS : M'F \text{ (Hauber §. 28.)}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ p : q \end{array} \right\} \gtrless L'E : M'F$$

Demnach bestimmen die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie EK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches CD in G schneide, so ist $SG \cdot GK < SE \cdot EK$

also $p : q = HE : FG$, wie Fall 1. Bew. Es ist also eine zweite Linie gefunden worden, welche auf den Linien FC, EA Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FD. (Fig. 13.)

Analysis.

Es sey $H'G'$ die gesuchte Linie, so ist $KG'.G'S$ gegeben, wie Fall 3. Anal. Da nun auch $G'S - KG' = KS$ gegeben ist, so ist KG' (Dat. 85.), somit G' und die Lage der geraden Linie OG' gegeben.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 2., wenn man G', H', R' statt G, H, R setzt.

Beweis.

Es ist $KG'.G'S = FS.KE$ (Lehns. B.)

also $G'K : KE = FS : SG'$

folglich $p : q = H'E : FG'$, wie Fall 3. Bew.

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien KD, EA in M', L' schneidende gerade Linie OM' ist

$$\frac{SG'.G'K}{FS.KE} \geq \frac{SM'.M'K}{EH'.FG'} \quad (\text{El. II. 6.})$$

also $EK : KM' \geq M'S : SF$ (Hauber §. 53.)

folglich $\frac{EM':M'K}{EL':KO} \geq \frac{M'F:FS}{EH':FG'}$ (Hauber §. 19.)

mithin $EL' : M'F \geq \begin{cases} KO : FS \\ EH' : FG' \end{cases}$ (Hauber §. 43.)

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie KD bestimmen also kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches CD in G schneide, so ist $FK > KE$, also liegt G zwischen F, E, und es ist $p : q = HE : FG$, wie Fall 2. Bew.; folglich sind auch auf den Linien EF, EA Segmente in dem gegebenen Verhältnisse gefunden worden, welches Fall 2. ist.

Anm. zu loc. IV.

Da bey keinem Falle von loc. IV, eine Determination statt findet, so kann die Aufgabe für jedes gegebene Verhältniß nach jedem Falle aufgelöst werden.

B.) auf der Linie ED. (Fig. 14 — 26.) Es liege, wenn K den Durchschnitt der mit AB parallel gezogenen Linie OK und der Linie CD bezeichnet, der Punkt F

a.) in K. (Fig. 14 — 16.). (Loc. V.)

Fall 1.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien EA, KD. (Fig. 14.)

Analysis.

Es sey HG die gesuchte Linie. Macht man $OK \parallel AB$, und $OK : KS = p : q$
 $= EH : KG$

so ist $OK : HE \} = SK : KG$
 $KG : GE \}$

$$\text{also } KG : \left\{ \begin{array}{l} EG - GK \\ EK \end{array} \right\} = SK : \left\{ \begin{array}{l} GK - KS \\ GS \end{array} \right\}$$

folglich $KG \cdot GS = EK \cdot KS$

Da EK, KS gegeben sind, so ist $KG \cdot GS$ der Gröfse nach, und, da $KG - GS = KS$ gegeben ist, KG (Dat. 85.), somit G , und die gerade Linie OG der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $OK \# AB$, $KP = p$, $KQ = q$, $OS \# PQ$, $EKU = KST = R$, $UK = KE$, $TS = SK$, beschreibe über KS als Durchmesser einen Kreis, welcher von der geraden Linie TU in R geschnitten werde, und errichte in R auf TU die gerade Linie RG perpendicular, welche der Linie CD in R begegne, so ist OG die gesuchte Linie.

Beweis.

Es ist $KG \cdot GS = UK \cdot ST$ (Lehns. B.)
 $= EK \cdot KS$

$$\text{also } GK : KE = KS : SG$$

$$\text{folglich } KG : \left\{ \begin{array}{l} GK + KE \\ GE \\ OK : HE \end{array} \right\} = KS : \left\{ \begin{array}{l} KS + SG \\ KG \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK : KS \\ PK : KQ \\ p : q \end{array} \right\} = HE : KG$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere, die Linien EA, KD in L, M schneidende gerade Linie OM ist

$$\underline{EL \leq EH, KM \geq KG}$$

$$\text{also } EL : KM \leq EH : KG \text{ (Hauber §. 41.)}$$

folglich bestimmen die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie KD grössere Verhältnisse, als die entfernteren,

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein die AB in G' schneidendes Perpendikel auf TU, so ist

$$\underline{KG' \cdot G'S = EK \cdot KS}$$

$$\text{also } G'K : KE = KS : SG'$$

$$\text{Da } KS < SG'$$

$$\text{so ist } \underline{G'K < KE}$$

folglich liegt G' zwischen K, E.

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} G'K : \{ EK - G'K \} \\ \quad \quad \quad \{ EG' \} \\ OK : EH' \end{array} \right\} = KS : \left\{ \begin{array}{l} SG' - KS \\ \quad \quad \quad KG' \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} OK : KS \\ \quad \quad \quad p : q \end{array} \right\} = EH' : KG'$$

mithin ist auch eine Linie OG' gefunden, welche von den Linien EB, EK Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 2. ist,

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien BE, EK.
(Fig. 14.)

Analysis.

Es sey $H'G'$ die gesuchte Linie. Macht man
 $OK \nparallel AB$, und $OK : KS = p : q$
 $= EH' : KG'$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} OK : H'E \\ KG' : G'E \end{array} \right\} = SK : KG'$$

$$\text{also } KG' : \left\{ \begin{array}{l} KG' + G'E \\ KE \end{array} \right\} = SK : \left\{ \begin{array}{l} SK + KG' \\ SG' \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } KG' \cdot G'S = SK \cdot KE$$

Da SK, KE gegeben sind, so ist $KG' \cdot G'S$ der Gröfse nach, und, da $G'S - KG' = KS$ gegeben ist, KG' (Dat. 85.), somit G' und die gerade Linie OG' der Lage nach gegeben.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn nur R', G', H' statt R, G, H gesetzt wird.

Beweis.

$$\text{Es ist } KG' \cdot G'S = EK \cdot KS$$

$$\text{also } p : q = EH' : KG', \text{ wie Fall 1. Zus. 2.}$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien EB, EK in M, L schneidende gerade Linie ist $EL' \leq EH', KM' \geq KG'$

$$\text{folglich } EL' : KM' \leq EH' : KG'$$

mithin bestimmen die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie KE kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R der Linie TU und des Kreises ein die Linie KD in G schneidendes Perpendikel auf TU, so ist

$$\underline{KG \cdot GS = EK \cdot KS}$$

folglich $p : q = EH : KG$ (buchst., wie Bew. zu Fall 1.), also ist auch eine Linie OG gefunden, welche von den Linien EA, KD Segmente abschneidet in dem gegebenen Verhältnisse, welches Fall 1. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, KC. (Fig. 15. 16.)

Analysis.

Es sey HG die gesuchte Linie. Macht man OK $\perp$ AB, und $OK : KS = p : q$
 $= EH : KG$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} OK : EH \\ KG : GE \end{array} \right\} = SK : KG$$

$$\text{also } KG : \left\{ \begin{array}{l} KG - GE \\ KE \end{array} \right\} = SK : \left\{ \begin{array}{l} SK - KG \\ GS \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } KG \cdot GS = EK \cdot KS$$

Da EK, KS gegeben sind, so ist KG.GS der Gröfse nach, und, da $KG + GS = KS$ gegeben ist, KG (Dat. 86.), somit G und die gerade Linie OG der Lage nach gegeben.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der über KS beschriebene Halbkreis der Linie TU begegne, muß (verm. Lehns. A. Det.) seyn

$$\left. \begin{array}{l} TS.KU \\ SK.KE \end{array} \right\} = \frac{1}{4}SK^2$$

$$\text{also } KE = \frac{1}{4}SK$$

$$\text{folglich } 4KE = SK$$

$$\text{mithin } OK : 4KE = \left\{ \begin{array}{l} OK : KS \text{ (El. V. 8.)} \\ p : q \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } OK : 4KE = \left\{ \begin{array}{l} p : q \\ OK : KS \end{array} \right.$$

$$\text{also } 4KE = KS$$

$$\text{folglich } KE = \frac{1}{4}KS$$

$$\left. \begin{array}{l} SK.KE \\ TS.KU \end{array} \right\} = \frac{1}{4}KS^2$$

also berührt (Fig. 15.), oder schneidet (Fig. 16) der Kreis die Linie TU (Lehns. A.), so daß $SG.GK = SK.KE$

$$\text{also } GK : KE = KS : SG$$

$$\text{Da } KS > SG$$

$$\text{so ist } GK > KE$$

also liegt der Punkt G auf der Linie EC .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ferner ist } GK : \left\{ \begin{array}{l} GK - KE \\ GE \end{array} \right\} \\ OK : HE \end{array} \right\} = KS : \left\{ \begin{array}{l} KS - SG \\ KG \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{OK} : \text{KS} \\ p : q \end{array} \right\} = \text{HE} : \text{KG}$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien EA, KS (Fig. 15.) in L, M schneidende gerade Linie OM ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{KG, GS} \\ \text{SK, KE} \end{array} \right\} > \text{KM, MS, weil } \text{KG} = \text{GS},$$

$$\text{also } \text{MK} : \text{KE} < \text{KS} : \text{SM} \text{ (Hauber §. 53.)}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{MK} : \left\{ \begin{array}{l} \text{MK} - \text{KE} \\ \text{ME} \end{array} \right\} \\ \text{OK} : \text{EL} \end{array} \right\} > \text{KS} : \left\{ \begin{array}{l} \text{KS} - \text{SM} \\ \text{KM} \end{array} \right\} \text{ (Hauber §. 24.)}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} \text{OK} : \text{KS} \\ \text{EH} : \text{KG} \end{array} \right\} > \text{EL} : \text{KM} \text{ (Hauber §. 43.)}$$

Dieser Punkt G, für welchen $\text{GE} = \text{EK}$, bestimmt also ein größeres Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie ES.

$$\text{Macht man } \text{EL} : \text{KM} = \text{OK} : \text{KV}$$

$$\text{so ist } \text{OK} : \text{KV} < \text{OK} : \text{KS}$$

$$\text{also } \text{KV} > \text{KS}$$

$$\text{Auch ist } \left. \begin{array}{l} \text{EL} : \text{OK} \\ \text{EM} : \text{MK} \end{array} \right\} = \text{MK} : \text{KV}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{KM} - \text{ME} \\ \text{EK} \end{array} \right\} : \text{MK} = \left\{ \begin{array}{l} \text{VK} - \text{KM} \\ \text{MV} \end{array} \right\} : \text{KV}$$

$$\text{mithin } \text{KM, MV} = \text{EK, KV}$$

$$\text{Ferner ist } \text{GK} > \text{KE}$$

$$\text{also } \text{GK, VS} > \text{KE, VS}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{KG, GS} + \text{KG, SV} \\ \text{KG, GV} \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} \text{SK, KE} + \text{KE, VS} \\ \text{VK, KE} \\ \text{KM, MV} \end{array} \right.$$

mithin liegt G dem Halbirungspunkte von KV näher, als M (El. II. 5.). Ist nun $YG > GM$, so ist also auch $KM.MV \{ > KY.YV$

$$VK.KE \}$$

somit $YK : KE < KV : VY$ (Hauber §. 53.)

also $YK : \left\{ \begin{array}{l} YK-KE \\ YE \end{array} \right\} \{ > KV : \left\{ \begin{array}{l} KV-VY \\ KY \end{array} \right\}$ (Hauber §. 24.)

$$OK : XE \}$$

wenn OY die AB
in X schneidet,

folglich $OK : KV \{ > EX : KY$
 $EL : KM \}$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie ES grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. (Apoll.)

Errichtet man (Fig. 16.) in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches die CD in G' schneide, so ist $SG'.G'K = SK.KE$

also $G'K : KE = KS : SG'$

Da $KS > SG'$

so ist $G'K > KE$

folglich liegt auch der Punkt G' auf der Linie EC.

Ferner ist $G'K : \left\{ \begin{array}{l} G'K-KE \\ EG' \end{array} \right\} \{ = KS : \left\{ \begin{array}{l} KS-SG' \\ KG' \end{array} \right\}$
 $OK : EH' \}$

also $OK : KS \{ = EH' : KG'$

$$p : q \}$$

Es ist mithin eine zweite Linie OG' gefunden, welche auf den Linien EA, KC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet.

Anm. zu loc. V.

Die in loc. V. enthaltene Aufgabe kann, je nach-

dem $p : q \begin{cases} = \\ > \\ < \end{cases} \begin{cases} OK : 4KE, \text{ nach Fall } \begin{cases} 1.2.3. \\ 1.2. \\ 1.2.3. \end{cases} \end{cases}$ aufgelöst werden.

b.) zwischen E, K. (Fig. 17—21.). (Loc. VI.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FD. (Fig. 17.)

Analysis.

Buchst., wie loc. IV. Fall 2. Anal.

Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Beweis.

Es ist $KG \cdot GS = FS \cdot EK$ (Lehns. B.)

also $GK : KE = FS : SG$

folglich $p : q = EH : FG$, wie loc. IV. Fall 1. Bew.

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die geraden Linien AE, FD in L, M schneidende gerade Linie OM ist

$EL \lesseqgtr EH, FM \gtrless FG$

also $EL : FM \lesseqgtr EH : FG$ (Hauber §. 41.)

mithin bestimmen die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie KD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Z u s. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU auf TU ein Perpendikel R'G', welches die Linie CD in G' schneide, so ist $KG'.G'S = FS.EK$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} KG'.G'S \\ G'\alpha^2 - \alpha S^2 \end{matrix} \right\} > \left\{ \begin{matrix} KF.FS \\ F\alpha^2 - \alpha S^2 \end{matrix} \right. , \quad \left. \begin{matrix} KG'.G'S \\ G'\alpha^2 - \alpha S^2 \end{matrix} \right\} < \left\{ \begin{matrix} SE.EK \\ E\alpha^2 - \alpha S^2 \end{matrix} \right. \\ \text{w. } K\alpha = \alpha S,$$

folglich $G'\alpha > \alpha F$, $G\alpha < \alpha E$
mithin liegt G' zwischen E, F.

Ferner ist $EK : KG' = G'S : SF$

also $p : q = EH' : FG'$ (buchst., wie loc. IV. Fall 3. Bew.), mithin ist eine Linie OG' gefunden, welche von den Linien FE, EB Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

F a l l 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FD, EB. (Fig. 18. 19.)

Analysis.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der geraden Linie TU begegne, muß seyn

$$\left. \begin{matrix} UK.ST \\ EK.FS \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4}KS^2 \text{ (Lehns. A. Det.)} \\ \frac{1}{4}(KF+FS)^2 \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } 4EK.FS \stackrel{<}{=} KF^2 + 2KF.FS + FS^2 \text{ (El. II. 4.)}$$

$$\text{folglich } 2(2EK - KF)FS - KF^2 \stackrel{<}{=} FS^2$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} (KE+EF)^2 - (KE-EF)^2 \\ (El. II. 4. 7.) \quad 4KE.EF \end{array} \right\} = (KE+EF)^2 - 2(KE+EF)FS + FS^2$$

$$\text{somit } 2\sqrt{KE.EF} \leq KE+EF-FS$$

$$\text{demnach } FS \leq KE+EF-2\sqrt{KE.EF}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ p : q \end{array} \right\} \geq OK : KE+EF-2\sqrt{KE.EF} \quad (El. V. 8.)$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ OK : FS \end{array} \right\} \geq OK : KE+EF-2\sqrt{KE.EF} \quad (Det.)$$

$$\text{also } FS \leq KE+EF-2\sqrt{KE.EF} \quad (El. V. 10.)$$

$$\text{folglich } 2\sqrt{KE.EF} \leq KE+EF-FS$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} 4KE.EF \\ (KE+EF)^2 - (KE-EF)^2 \\ KF^2 \end{array} \right\} \leq \left. \begin{array}{l} (KE+EF)^2 - 2(KE+EF)FS + FS^2 \\ 2(2EK-KF) \end{array} \right\}$$

$$\text{somit } 2(2EK-KF)FS \leq KF^2 + FS^2$$

$$\text{demnach } 4EK.FS \leq KF^2 + 2KF.FS + FS^2$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} EK.FS \\ UK.ST \end{array} \right\} \leq \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}(KF+FS)^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\}$$

folglich berührt (Fig. 18.), oder schneidet (Fig. 19.) der Kreis die gerade Linie TU, so daß $KG.GS = EK.FS$

$$\text{also } GK : KE = FS : SG$$

Nun ist $FK < KE$

also $KF \cdot FS < EK \cdot FS$ (El. VI. 1.)

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} KF(KF+FS) \\ FK \cdot KS \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} KF^2 + EK \cdot FS \\ KG \cdot GS \\ \frac{1}{4}KS^2 - G\alpha^2, \text{ wenn} \\ K\alpha = \alpha S, \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } G\alpha^2 < (KF - \frac{1}{2}KS)^2$$

$$\text{somit } G\alpha < KF - \frac{1}{2}KS$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}KS + G\alpha \\ KG \end{array} \right\} < KF$$

also liegt G zwischen K, F.

Ferner ist $KG : \left\{ \begin{array}{l} EK - KG \\ GE \\ OK : HE \end{array} \right\} = FS : \left\{ \begin{array}{l} GS - SF \\ FG \end{array} \right\}$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} OK \\ NF \end{array} \right\} : FS = EH : FG$$

$$p : q$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere, die Linien KF, EB (Fig. 18.) in M, L schneidende gerade Linie OM ist

$$\left. \begin{array}{l} KG \cdot GS \\ SF \cdot KE \end{array} \right\} > KM \cdot MS, \text{ weil } KG = GS,$$

$$\text{also } MK : KE < FS : SM \text{ (Hauber §. 53.)}$$

$$\text{folglich } MK : \left\{ \begin{array}{l} EK - KM \\ ME \\ OK : EL \end{array} \right\} < FS : \left\{ \begin{array}{l} MS - SF \\ MF \end{array} \right\} \text{ (Hauber §. 28.)}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ EH : FG \end{array} \right\} < EL : MF \text{ (Hauber §. 43.)}$$

Der Punkt G, für welchen $GE = \sqrt{KE \cdot EF}$, bestimmt also ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie K F.

Macht man $EL : FM = OK : FV$

so ist $OK : FV > OK : FS$

also $FV < FS$ (El. V. 10.)

Auch ist $EL : OK = MF : FV$
 $EM : MK$

folglich $EM + MK : MK = MF + FV : FV$
 $EK : MV$

mithin $KM \cdot MV = EK \cdot FV$

Ferner ist $GK < KE$

also $GK \cdot VS < KE \cdot VS$ (El. VI. 1.)

folglich $KG (GS - SV) > (FS - SV) KE$
 $KG \cdot GV : FV \cdot KE$
 $KM \cdot MV$

also liegt G dem Halbirungspunkte von K V näher, als M. (El. II. 5.). Ist nun $YG > GM$, so ist

$KM \cdot MV > KY \cdot YV$
 $EK \cdot FV$

also $YK : KE < FV : VY$ (Hauber §. 53.)

folglich $YK : \left\{ \begin{array}{l} EK - KY \\ YE \end{array} \right\} < FV : \left\{ \begin{array}{l} YV - VF \\ YF \end{array} \right\}$ (Hauber §. 28.)
 $OK : EX$ wenn OY der EB in X begegnet,

also $OK : FV < EX : FY$
 $EL : FM$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. (Apoll.)

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' (Fig. 19.) des Kreises und der Linie T U ein Perpendikel auf T U, welches der K F in G' begegne, so ist

$$SG'.G'K=FS.EK$$

$$\text{also } \frac{G'K : KE}{SG' : FS} = 1$$

folglich $p : q = H'E : G'F$, wie loc. IV. Fall 1. Zus. 2., mithin ist eine zweite Linie O G' gefunden, welche von den Linien E B, F G Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FE, EB. (Fig. 17.)

Analysis.

Es sey H'G' die gesuchte Linie. Macht man OK $\parallel$ AB, und $OK : FS = p : q$, so ist, wie loc. IV. Fall 3. Anal., KG'.G'S der Gröfse nach, und da $SG' - G'K = SK$ gegeben ist, KG' (Dat. 85.), somit G' und die Linie O G' der Lage nach gegeben.

Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1., wenn man R', G', H' statt R, G, H setzt.

Beweis.

$$\text{Es ist } KG'.G'S=FS.EK$$

$$\text{also } p : q = EH' : FG' \quad (\text{buchst., wie Fall 1. Zus. 2.})$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere die Linien FE, EB in M', L' schneidende gerade Linie ist

$$EL' \lesseqgtr EH', FM' \gtrless FG'$$

also $EL' : FM' \lesseqgtr EH' : FG'$ (Hauber §. 41.)

folglich bestimmen die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie EF kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der geraden Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches die Linie FD in G schneide, so ist $KG.GS = FS.KE$

also $EH : FG = p : q$ (buchst., wie zu Fall 1. Bew.)

Es ist also auch eine Linie OG gefunden, welche von den Linien EA, FD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FC. (Fig. 20. 21.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der geraden Linie TU begegne,

$$\text{muß seyn } \left. \begin{array}{l} UK.ST \\ EK.FS \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}SK^2 \\ \frac{1}{4}(KF+FS)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } 4EK.FS \begin{array}{l} = \\ < \end{array} KF^2 + 2KF.FS + FS^2$$

$$\text{folglich } 2(2EK - KF)FS \cdot KF^2 = FS^2$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} (KE + EF)^2 \cdot (KE - EF)^2 \\ 4KE \cdot EF \end{array} \right\} = FS^2 - 2(KE + EF)FS + (KE + EF)^2$$

$$\text{somit } 2\sqrt{KE \cdot EF} = FS - (KE + EF)$$

$$\text{demnach } KE + EF + 2\sqrt{KE \cdot EF} = FS$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ p : q \end{array} \right\} = OK : KE + EF + 2\sqrt{KE \cdot EF}$$

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ OK : FS \end{array} \right\} = OK : KE + EF + 2\sqrt{KE \cdot EF}$$

$$\text{also } FS = KE + EF + 2\sqrt{KE \cdot EF}$$

$$\text{folglich } FS - (KE + EF) = 2\sqrt{KE \cdot EF}$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} FS^2 - 2(KE + EF)FS + (KE + EF)^2 \\ 4KE \cdot EF \end{array} \right\} = (KE + EF)^2 - (KE - EF)^2$$

$$\text{somit } FS^2 = 2(2KE - KF)FS - KF^2$$

$$\text{demnach } KF^2 + 2KF \cdot FS + FS^2 = 4KE \cdot FS$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}(KF + FS)^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} KE \cdot FS \\ UK \cdot TS \end{array} \right\}$$

folglich berührt (Fig. 20.), oder schneidet (Fig. 21.) der Kreis die Linie TU, so daß $KG \cdot GS = KE \cdot FS$

$$\text{also } GK : KE = FS : SG$$

Nun ist $FK < KE$

also $\overline{KF \cdot FS < FS \cdot KE}$

folglich $\overline{\left. \begin{array}{l} KF(KF+FS) \\ FK \cdot KS \end{array} \right\} < KF^2 + \left\{ \begin{array}{l} KG \cdot GS \\ \frac{1}{4}KS^2 - G\alpha^2, \text{ wenn} \\ K\alpha = \alpha S, \end{array} \right.$

mithin $\overline{G\alpha^2 < (\frac{1}{2}KS - KF)^2}$

somit $\overline{KF < \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}KS - G\alpha \\ KG \end{array} \right.}$

demnach $\overline{FS > SG}$

also $\overline{GK > KE}$

folglich liegt G auf der Linie EC.

Auch ist $\overline{\left. \begin{array}{l} GK : \left\{ \begin{array}{l} GK - KE \\ EG \end{array} \right\} \\ OK : HE \end{array} \right\} = FS : \left\{ \begin{array}{l} FS - SG \\ FG \end{array} \right\}}$

mithin $\overline{\left. \begin{array}{l} OK \left\{ : FS \right\} \\ NF \left\{ \right. \\ p : q \end{array} \right\} = HE : FG}$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere, die Linien EA, FS (Fig. 20.) in L, M schneidende gerade Linie OM ist

$\overline{\left. \begin{array}{l} KG \cdot GS \\ SF \cdot KE \end{array} \right\} > KM \cdot MS}$

also $\overline{MK : KE < FS : SM}$

folglich $\overline{\left. \begin{array}{l} MK : \left\{ \begin{array}{l} MK - KE \\ ME \end{array} \right\} \\ OK : EL \end{array} \right\} > FS : \left\{ \begin{array}{l} FS - SM \\ FM \end{array} \right\} \text{ (Hauber §. 24.)}$

mithin $\overline{\left. \begin{array}{l} OK : FS \\ EH : FG \end{array} \right\} > EL : EM}$

demnach bestimmt der Punkt G, für welchen $GE = \sqrt{FE \cdot EK}$, ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie ES.

Macht man $EL : FM = OK : FV$

so ist $OK : FV < OK : FS$

also $FV > FS$

Auch ist $EL : OK = FM : FV$
 $EM : MK$

folglich $KM - ME : MK = \frac{VF - FM}{MV} : FV$
 EK

mithin $KM \cdot MV = EK \cdot FV$

Ferner ist $GK > KE$

also $GK \cdot VS > KE \cdot VS$

folglich $GK(GS + SV) > \frac{EK(FS + SV)}{EK \cdot FV} \cdot KM \cdot MV$
 $KG \cdot GV$

also liegt G dem Halbirungspunkte von KV näher, als M. Ist nun $YG > GM$

so ist $KM \cdot MV > KY \cdot YV$ (El. II. 5.)
 $EK \cdot FV$

also $YK : KE < FV : VY$

folglich $YK : \frac{YK - KE}{YE} > FV : \frac{FV - VY}{FY}$ (Hauber §. 24.)
 $OK : EX$ wenn OY die AB in X schneidet,

mithin $OK : FV > EX : FY$
 $EL : FM$

Demnach bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. (Apoll.)

Errichtet man (Fig. 21.) in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises mit der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches der Linie KS in G' be-
gegnet, so liegt auch G' auf EC, und wenn OG' der AE in H' begegnet, so ist $p : q = H'E : FG'$, welches eben so bewiesen wird, wie es für EH, FG geschehen ist.

Anm. zu loc. VI.

Wenn das gegebene Verhältniss

$$p : q \left\{ \begin{array}{l} \geq OK : KE + EF - 2\sqrt{KE \cdot EF} \\ \leq OK : KE + EF + 2\sqrt{KE \cdot EF} \end{array} \right\}, \text{ so kann die Auf-}$$

gabe nach Fall $\left\{ \begin{array}{l} 1. 2. 3. \\ 1. 3. 4. \end{array} \right\}$ aufgelöst werden.

c.) auf der Verlängerung von EK.
(Fig. 22 – 26.). (Loc. VII.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FD. (Fig. 22.)

Analysis.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 2.

Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Beweis.

Es ist $KG \cdot GS = EK \cdot FS$

also $GK : KE = FS : SG$

folglich $p : q = EH : FG$ (wie loc. IV. Fall 1. Bew.)

Zus. 1. (Apoll.)

Buchst., wie zu loc. VI. Fall 1. Zus. 1.

Zus. 2.

Errichtet man auch in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU , so ist $KG' \cdot G'S = FS \cdot KE$

also $G'K : KE = FS : SG'$

Da $FS < SG'$ (Lehns. B.)

so ist $G'K < KE$

also liegt der Punkt G' zwischen K, E .

Ferner ist $G'K : \left\{ \begin{array}{l} EK - KG' \\ EG' \end{array} \right\} = FS : \left\{ \begin{array}{l} G'S - SF \\ G'F \end{array} \right\}$

$OK : EH' \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ wenn die gerade Linie OG'
die Linie EB in H' schneidet,

folglich $OK : FS \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = EH' : FG'$

$p : q \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$

Es ist mithin eine Linie OG' gefunden, welche von den Linien FE, EB Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FK . (Fig. 23. 24.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis der geraden Linie TU begegne, muß seyn $UK.ST \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \frac{1}{4}SK^2$

$$EK.FS \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \frac{1}{4}(KF-FS)^2$$

$$\text{also } 4EK.FS \stackrel{=}{<} KF^2 - 2KF.FS + FS^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} 2(2EK+KF)FS \\ 2(FE+EK)FS \end{array} \right\} - KF^2 \stackrel{=}{<} FS^2$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} (FE+EK)^2 - (FE-EK)^2 \\ 4FE.EK \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} (FE+EK)^2 - 2(FE+EK)FS + FS^2$$

$$\text{somit } 2\sqrt{FE.EK} \stackrel{=}{<} (FE+EK) - FS$$

$$\text{demnach } FS \stackrel{=}{<} FE+EK - 2\sqrt{FE.EK}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ p : q \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} OK : FE+EK - 2\sqrt{FE.EK}$$

B e w e i s.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ OK : FS \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} OK : FE+EK - 2\sqrt{FE.EK}$$

$$\text{also } FS \stackrel{=}{<} \left. \begin{array}{l} FE+EK - 2\sqrt{FE.EK} \\ FK+2KE - 2\sqrt{FE.EK} \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} 4FE.EK \\ (FE+EK)^2 - \left\{ \begin{array}{l} (FE-EK)^2 \\ FK^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \stackrel{=}{<} (FE+EK)^2 - \left\{ \begin{array}{l} 2(FE+EK)FS \\ 2(2EK+KF)FS \end{array} \right\} + FS^2$$

$$\text{mithin } 4EK.FS \stackrel{=}{<} \left. \begin{array}{l} FK^2 - 2KF.FS + FS^2 \\ KS^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{somit } EK.FS \stackrel{=}{<} \frac{1}{4}KS^2$$

Der Kreis berührt also (Fig. 23.), oder schneidet (Fig. 24.) die Linie TU.

$$\text{Auch ist } FS < \overline{FK + 2KE - 2\sqrt{FE \cdot EK}}$$

$$\text{also } FS < FK$$

folglich liegt G zwischen K, F.

$$\text{Ferner ist } KG \cdot GS = UK \cdot ST \\ = FS \cdot EK$$

$$\text{also } GK : KE = FS : SG$$

$$\text{folglich } KG : \left\{ \begin{array}{l} GK + KE \\ GE \end{array} \right\} = FS : \left\{ \begin{array}{l} FS + SG \\ FG \end{array} \right\} \\ OK : HE$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK \\ NF \end{array} \right\} : FS = HE : FG \\ p : q$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere (Fig. 23.), die Linien AE, KS in L, M schneidende gerade Linie OM ist

$$\left. \begin{array}{l} KG \cdot GS \\ SF \cdot KE \end{array} \right\} > KM \cdot MS$$

$$\text{also } MK : KE < FS : SM$$

$$\text{folglich } MK : \left\{ \begin{array}{l} MK + KE \\ ME \end{array} \right\} < FS : \left\{ \begin{array}{l} FS + SM \\ FM \end{array} \right\} \text{ (Hauber §.25.)} \\ OK : EL$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ EH : FG \end{array} \right\} < EL : FM$$

Der Punkt G, für welchen $GE = \sqrt{FE \cdot EK}$, bestimmt also ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie KS.

Macht man $EL : FM = OK : FV$

so ist $OK : FV > OK : FS$

also $FV < FS$

Auch ist $EL : OK = MF : FV$

$EM : MK$

folglich $EM - MK : KM = MF - FV : VF$
 $EK : MV$

mithin $KM \cdot MV = EK \cdot VF$

Ferner ist $FS > FV$

also $EK \cdot FS > EK \cdot FV$
 $KG \cdot GS > KM \cdot MV$

folglich $KG \cdot GV > KM \cdot MV$

mithin liegt G dem Halbirungspunkte von KV näher, als M. Ist nun $YG > GM$, so ist

$KM \cdot MV > KY \cdot YV$
 $EK \cdot VF$

also $KY : KE < VF : VY$

folglich $KY : \left\{ \begin{array}{l} KY + KE \\ YE \\ OK : EX \end{array} \right\} < VF : \left\{ \begin{array}{l} VF + VY \\ FY \end{array} \right\}$

wenn OY der
 AE in X begegnet,

mithin $OK : FV < EX : FY$
 $EL : FM$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie KS kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. (Apoll.)

Errichtet man (Fig. 24.) auch in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU , so liegt G' zwischen K, F , und es ist $KG'.G'S = EK.FS$

also $p : q = H'E : FG'$, welches bewiesen wird, wie es für die Linien HE, FG bewiesen wurde.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien KE, EB . (Fig. 22.)

Analysis.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 3.

Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1., wenn man R', G', H' statt R, G, H setzt.

Beweis.

Es ist $KG'.G'S = FS.KE$

also $p : q = EH' : FG'$ (buchst., wie Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere, die Linien EB, FE in L', M' schneidende gerade Linie OM ist

$$FM' \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} FG', EL \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} EH'$$

also $EL' : FM' \leq EH' : FG'$ (Hauber §. 41.)

Die dem Punkte E näher liegenden Punkte der Linie EK bestimmen also kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man auch in dem zweiten Durchschnitte R der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches der ED in M begegne, so ist

$$KG \cdot GS = EK \cdot FS$$

also $p : q = EH : FG$ (wie Fall 1. Bew.). Es ist mithin eine Linie OG gefunden worden, welche von den Linien EA, FD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien EA, FC. (Fig. 25. 26.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu loc. IV. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis die Linie TU erreiche, muß seyn

$$\left. \begin{array}{l} UK \cdot ST \\ EK \cdot FS \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} SK^2 \\ \frac{1}{4} (SF - FK)^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } 4EK \cdot FS < FS^2 - 2SF \cdot FK + FK^2$$

folglich

$$\frac{(FE + EK)^2 \cdot (FE - EK)^2}{4FE \cdot EK} < \frac{FS^2 - \{2(2EK + KF)FS\} + (FE + EK)^2}{2(FE + EK)FS}$$

$$\text{mithin } 2\sqrt{FE \cdot EK} < FS - (FE + EK)$$

$$\text{somit } FE + EK + 2\sqrt{FE \cdot EK} < FS$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} OK : FS \\ p : q \end{array} \right\} < OK : FE + EK + 2\sqrt{FE \cdot EK}$$

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ \text{OK : FS} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \text{OK : FE + EK + } 2\sqrt{\text{FE} \cdot \text{EK}} \\ < \end{array}$$

$$\text{also } \text{FS} > \text{FE + EK + } 2\sqrt{\text{FE} \cdot \text{EK}}$$

$$\text{folglich } \text{FS} - (\text{FE + EK}) > 2\sqrt{\text{FE} \cdot \text{EK}}$$

mithin

$$\text{FS}^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2(\text{FE + EK}) \text{FS} \\ 2(2\text{EK + KF}) \text{FS} \end{array} \right\} + (\text{FE + EK})^2 > \left\{ \begin{array}{l} 4\text{FE} \cdot \text{EK} \\ (\text{FE + EK})^2 - (\text{FE} \cdot \text{EK})^2 \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \text{FS}^2 - 2\text{KF} \cdot \text{FS} + \text{FK}^2 > 4\text{EK} \cdot \text{FS}$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{4}(\text{FS} - \text{FK})^2 \\ \frac{1}{4}\text{KS}^2 \end{array} \right\} > \text{EK} \cdot \text{FS}$$

Der Kreis berührt also (Fig. 25.), oder schneidet (Fig. 26.) die Linie TU, so daß $\text{KG} \cdot \text{GS} = \text{UK} \cdot \text{ST} = \text{FS} \cdot \text{EK}$

$$\text{folglich } \text{GK} : \text{KE} = \text{FS} : \text{SG}$$

$$\text{Da } \text{FS} > \text{SG}$$

$$\text{so ist } \text{GK} > \text{KE}$$

also liegt der Punkt G auf der Linie EC.

$$\text{Ferner ist } \text{KG} : \left\{ \begin{array}{l} \text{GK - KE} \\ \text{GE} \end{array} \right\} = \text{FS} : \left\{ \begin{array}{l} \text{FS - SG} \\ \text{FG} \end{array} \right.$$

$$\text{OK : HE}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{somit } \text{OK} \cdot \text{FS} \\ p \cdot q \end{array} \right\} = \text{HE} : \text{FG}$$

Zus. 1. (Apoll.)

Für eine andere, die Linien EC, EA (Fig. 25.) in M, L schneidende gerade Linie OM ist

$$\begin{array}{l} \text{KG. GS} \\ \text{SF. KE} \end{array} \} > \text{KM. MS}$$

$$\text{also MK : KE} < \text{FS : SM}$$

also bestimmt der Punkt G, für welchen $\text{GE} = \sqrt{\text{FE.EK}}$, ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie E S, und die demselben näher liegenden Punkte bestimmen größere Verhältnisse, als die entfernteren, welches buchst. wie zu loc. VI. Fall 4. Zus. 1. bewiesen wird.

Zus. 2. (Apoll.)

Errichtet man (Fig. 26.) in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches der KC in G' begegne, so liegt auch G' auf EC, und wenn OG' der AE in H' begegnet, so ist $p : q = \text{EH}' : \text{FG}'$, welches eben so bewiesen wird, wie es für EH, FG geschehen ist.

Anm. zu loc. VII.

Wenn das gegebene Verhältniß

$$p : q \left\{ \begin{array}{l} \geq \text{OK : FE + EK - } 2\sqrt{\text{FE.EK}} \\ \leq \text{OK : FE + EK + } 2\sqrt{\text{FE.EK}} \end{array} \right\}, \text{ so kann die}$$

Aufgabe nach Fall $\left\{ \begin{array}{l} 1. 2. 3. \\ 1. 3. 4. \end{array} \right\}$ aufgelöst werden.

Z W E I T E S B U C H.

Die gegebenen Linien sind nicht parallel, und die gegebenen Punkte liegen beide auſſerhalb des Durchſchnittspunktes derſelben. (Fig. 27—104.)

Bezeichnet man den Durchſchnittspunkt der Linien AB, CD mit I , ſo liege der auf der Linie AB gegebene Punkt F

I.) auf IB . (Fig. 27—69.). (Loc. I—VII.)
Der auf CD gegebene Punkt G liege

1.) auf IC . (Fig. 27—29.). (Loc. I.)

F a l l I.

Die geſuchten Segmente ſollen liegen auf den Linien FA, GC . (Fig. 27.)

Analysis.

Es ſey LX die geſuchte Linie. Zieht man die gerade Linie OF , welche die Linie CD in E ſchneide, ſo iſt, wenn $EH \parallel AB$, und H der Durchſchnitt der Linien EH, OX iſt, $FL : EH = FO : OE$ (El. VI. 4.),

also ist das Verhältniß $FL : EH$ gegeben (Dat. 28.2.).
Da auch das Verhältniß $FL : GX$ gegeben ist (p. hyp.),
so ist das Verhältniß $EH : GX$ gegeben (Dat. 9.),
mithin die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man ziehe die gerade Linie OF , welche der Linie CD in E begegne, mache $OK \parallel EH \parallel VG \parallel AB$,
 $OV \parallel FN \parallel CD$, $NP = p$, $NQ = q$, wenn das gegebene Verhältniß $= p : q$, wobey p, q gegebene Linien bezeichnen, $VM \parallel PQ$, bezeichne den Durchschnitt der Linien FN, VM mit M , nehme $MS \parallel AB$, bezeichne den Durchschnitt der Linien MS, CD mit S , mache $GST = R = SKU$, $TS = SG$, $UK = KE$, beschreibe über KS als Durchmesser einen Kreis, welcher der geraden Linie TU in R begegne, errichte in R auf TU ein Perpendikel, welches der Linie CD in X begegne, und ziehe OX , welche in I die Linie AB schneide, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Beweis.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 1. Bew. ist

$$EH : GX = VG : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$$

Nun ist $FL : EH = FO : OE$

$$= NV : VG \text{ (El. VI. 2.)}$$

also ist $FL : GX = VN : NM$ (El. V. 20.)

$$= PN : NQ$$

$$= p : q$$

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 1. ist für eine andere die Linien AI, GS, EH in Z, Y, W schneidende gerade Linie OY

$$EW : GY \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} VG : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right.$$

$$\text{Da auch } FZ : EW = FO : OE$$

$$= NV : VG$$

$$\text{so ist } FZ : GY \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} NV : MN \\ FL : GX \end{array} \right.$$

Also bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie GS grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2. schneidet ein in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU auf dieser Linie errichtetes Perpendikel die Linie EK in einem Punkte X' so, dafs, wenn OX' die Linien HE, FB in H', L' schneidet,

$$EH' : GX' = VG : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right.$$

$$\text{Nun ist } FL' : EH' = FO : OE$$

$$= NV : VG$$

$$\text{also } FL' : GX' = NV : MN$$

$$= p : q$$

Es ist mithin auch eine gerade Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB, GK Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien GI, FA. (Fig. 28. a.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Da der Punkt X auf der Linie GI liegen soll,
so wird $\underline{FL \geq FI, GX \leq GI}$

also $\underline{FL : GX \geq FI : IG}$ (Hauber §. 41.)

mithin mufs $p : q \geq FI : IG$ seyn.

Beweis.

Es ist vermöge lib. I. loc. IV. Fall 2. Bew.

$\underline{EH : GX = VG : GS}$

also $FL : GX = p : q$ (buchst., wie Fall 1. Bew.)

Da $p : q \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right. FI : IG$ (Det.)
 $\underline{FL : GX}$

so ist auch $\underline{GX \leq GI}$, weil sonst auch $FL < FI$

also $FL : GX < FI : IG$ (Hauber §. 41.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, EA, GS in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY ist (vermöge lib. I.

loc. IV. Fall 2. Zus. 1.) $\underline{EW : GY \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right. VG : GS}$

also $\underline{FZ : GY \geq FL : GX}$ (wie

Fall 1. Zus. 1.)

Es bestimmen also die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie GS kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches der Linie CD in X' begegne, so ist, wenn man die die Linien EH, AB in H', L' schneidende gerade Linie OX' zieht, (vermöge lib. I. loc. IV. Fall 2. Zus. 2.) $H'E : GX' = VG : GS$

$$\text{also } \overline{FL' : GX' = NV : GS} \text{ (wie Fall 1. Zus. 2.)}$$

$$= p : q$$

mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 5. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GD. (Fig. 27.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn man L', H', X' statt L, H, X setzt, also ist der Fall reducirt auf lib. I. loc. IV. Fall 3.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn man R', X', H', L' statt R, X, H, L setzt.

Beweis.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 3. Bew. ist

$$\overline{EH' : GX' = OK : GS}$$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie zu Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 3, Zus. 1. ist für eine andere, die Linien EK, EH, FB in Y', W', Z' schneidende gerade Linie OZ, EW': GY' $\leq$ VG : $\begin{cases} \text{GS} \\ \text{MN} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Da } FZ' : EW' &= FO : OE \\ &= NV : VG \end{aligned}$$

$$\text{so ist } FZ' : GY' \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} \right\} \begin{cases} NV : NM \\ FL' : GX' \end{cases}$$

Es bestimmen also die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 3. Zus. 2. schneidet ein in dem zweiten Durchschnitte R der Linie TU und des Kreises auf TU errichtetes Perpendikel die Linie GS so, daß, wenn die die Linien EH, IA in H, L schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$$HE : GX = VG : GS$$

also ist auch FL : GX = p : q (wie zu Fall 1. Bew.)

Es ist folglich eine gerade Linie OX gefunden worden, welche von den Linien FA, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist,

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GD. (Fig. 28. b.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe reducirt auf lib. I. loc. IV. Fall 2.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Da der Punkt X auf IE liegen soll, so wird

$$\underline{FL < FI, GX > GI}$$

$$\text{also } \underline{FL : GX < FI : IG} \text{ (Hauber §. 41.)}$$

mithin mufs $p : q < FI : IG$ seyn.

Beweis.

Es ist vermöge lib. I. loc. IV. Fall 2. Bew.

$$\underline{EH : GX = VG : GS}$$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie Fall 1. Bew.)}$$

$$\text{Da } p : q \left\{ \begin{array}{l} < FI : IG \\ FL : GX \end{array} \right.$$

so ist auch $GX \geq GI$, weil sonst $FL \geq GI$

$$\text{also } \underline{FL : GX > FI : IG} \text{ (Haub §. 41.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, EI, IF in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist (vermöge lib. I.

loc. IV. Fall 2. Zus. 1.) $EW : GY \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ < \end{array} \right\} VG : GS$

$$\text{also } \underline{FZ : GY \geq FL : GX} \text{ (wie Fall 1.}$$

Zus. 1.) Es bestimmen also die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EI kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2. Es ist mithin ein X gefunden worden, welche von den Buchst. wie Fall 2. Zus. 2. gegebenen Verhältnisse absteht, welches Fall 2. oder Fall 4. ist, je nachdem X auf G, oder F, oder E, fällt.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 29.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 4. reducirt.

Construction und Beweis.

Buchst., wie zu Fall 1.

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 1. ist für eine andere, die Linien AB, EH, KD in den Punkten Z, W, Y schneidende gerade Linie OY

$$EW : GY \geq VG : GS$$

$$\text{also } FZ : GY \geq FL : GX \text{ (wie Fall 1. Zus. 1.)}$$

Es bestimmen also die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KD kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf dieser Linie, so ist (vermöge lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 2.), wenn die die Linien EH, AB in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = VG : GS$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie Fall 1. Zus. 2.)}$$

Es ist mithin eine Linie OX' gefunden worden, welche von den Linien GE , FA Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 2., oder Fall 4. ist, je nachdem X' auf GI , oder EI fällt.

2.) auf ID (Fig. 30 — 69.), und zwar, wenn die der AB parallel gezogene gerade Linie OK die gerade Linie ID in K schneidet,

A.) in K . (Fig. 30 — 39.). (Loc. II.)

Fall I.

Die gesuchten Segmente sollen liegen auf den Linien GD , FA . (Fig. 30.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. V. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man ziehe die gerade Linie OF , welche der IK in E begegne, mache $OKN \parallel EH \parallel AB$, $FN M \parallel CD$, $NP = p$, $NQ = q$, $OM \parallel PQ$, $MS \parallel AB$, bezeichne den Durchschnitt der Linien CD , MS mit S , beschreibe über KS als Durchmesser einen Kreis, mache $UKS = KST = R$, $UK = KE$, $TS = SG$, ziehe TU , errichte in dem Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU , welches der KD in X begegne, und ziehe OX , welche die IA in L schneide, so sind FL , $G X$ die gesuchten Segmente.

Beweis.

Vermöge lib. I. loc. V. Fall 1. Bew. ist

$$EH : GX = OK : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$$

$$\text{Auch ist } FL : EH = FO : OE \\ = NO : OK$$

$$\text{also ist } FL : GX = ON : NM \\ = PN : NQ \\ = p : q$$

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. V. Fall 1. Zus. 1. ist, für eine andere, die Linien EH, IA, SD in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY, EW : GY $\leq$ OK :

$$\begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$$

$$\text{Nun ist } FZ : EW = FO : OE \\ = NO : OK$$

$$\text{also ist } FZ : GY \leq \begin{cases} ON : NM \\ p : q \end{cases}$$

Mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie SD kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf dieser Linie, welches der EK in X' begegne, so ist, wenn die Linie OX' gezogen wird, und mit H', L' die Durchschnittspunkte derselben mit EH, AB bezeichnet werden, (vermöge lib. I. loc. V. Fall 1. Zus. 2.)

$$EH' : GX' = OK : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$$

$$\text{Nun ist } FL' : EH' = FO : OE \\ = NO : OK$$

$$\text{also ist } FL' : GX' = ON : NM \\ = p : q$$

Es ist mithin auch eine gerade Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB , GI Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB , KI . (Fig. 30.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man daselbst H' , L' , X' statt H , L , X setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. V. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn man R' , X' , H' , L' statt R , X , H , L setzt.

Beweis.

Vermöge lib. I. loc. V. Fall 2. Bew. schneidet $R'X'$ die Linie GE so, daß $EH' : GX' = OK : GS$

also ist $FL' : GX' = p : q$ (buchst., wie zu Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GE , EH' , FB in Y' , W' , Z' schneidende gerade Linie OZ' ist (vermöge lib. I. loc. V. Fall 2. Zus. 1.)

$$EW' : GY' \leq OK : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$$

$$\text{Es ist aber } FZ' : EW' = FO : OE \\ = NO : OK$$

$$\text{also ist } FZ' : GY' \leq \begin{cases} ON : NM \\ p : q \end{cases}$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KE kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches der Linie SD in X begegne, so ist, wenn die die Linien EH, IA in H, L schneidende gerade Linie OX gezogen wird, (vermöge lib. I. loc. V. Fall 2. Zus. 2.) $EH : GX = OK : GS$

also $FL : GX = p : q$ (buchst., wie Fall 1. Bew.)

Es ist mithin eine Linie OX gefunden, welche von den Linien GD, FA Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, IG. (Fig. 31–35.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. V. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. II. Fall 1.

α.) Es sey $KE < EI$. (Fig. 31. 32.)

N) Es sey $p : q < OK + FI : 2KI$. (Fig. 31.)

Determination.

$$\begin{array}{l} \text{Da } p \cdot q \} < \{ OK + FI \} : 2IK \\ ON : NM \} \quad \quad \quad \{ ON \} \end{array}$$

$$\text{so wird } \begin{array}{l} MN \} > 2IK \text{ (El. V. 10.)} \\ KS \} \end{array}$$

also $K\alpha > KI$, wenn $K\alpha = \alpha S$.

Damit nun der Punkt X auf EI liege, muſs mit-
hin seyn $KI \stackrel{=}{>} K\alpha - \alpha X$.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist aber } KX \cdot XS \} = EK \cdot GS \text{ (Lehns. A.)} \\ \text{(El. II. 5.) } K\alpha^2 \} - \alpha X^2 \} \\ \quad \quad \quad \frac{1}{4}KS^2 \} \end{array}$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$$

$$\text{folglich muſs seyn } KI \stackrel{=}{>} \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$$

$$\text{mithin } \frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS \stackrel{=}{>} \frac{1}{4}KS^2 - IK \cdot KS + KI^2$$

$$\text{somit } \begin{array}{l} IK \cdot KS - EK \cdot GS \} \stackrel{=}{>} KI^2 \\ IE \cdot KS \} \end{array}$$

$$\text{demnach } \begin{array}{l} KI : IE \} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} SK \\ MN \end{array} \right\} : KI \text{ (Hauber §. 53.)} \\ OF : FE \} \\ ON : \left\{ \begin{array}{l} NK \\ FI \end{array} \right\} \} \end{array}$$

$$\text{also } \begin{array}{l} ON : NM \} \stackrel{=}{<} FI : IK \\ p : q \} \end{array}$$

Beweis.

Es ist $p : q < OK + FI : 2IK$

also auch $p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ OK + FI \} : 4KE \\ ON : NM \left\{ \begin{array}{l} < \{ ON \} \end{array} \right. \end{array} \right.$

folglich $MN \left\{ \begin{array}{l} > 4KE \\ GS \left\{ \begin{array}{l} > \end{array} \right. \end{array} \right.$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.).

Ferner ist $p : q \left\{ \begin{array}{l} = FI : IK \\ ON : NM \left\{ \begin{array}{l} < \end{array} \right. \end{array} \right.$

also $ON : \left\{ \begin{array}{l} FI \\ NK \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} MN \\ KS \end{array} \right\} : KI$
 $OF : FE$
 $KI : IE$

folglich $IE \cdot KS \left\{ \begin{array}{l} = KI^2 \text{ (Hauber §. 52.)} \\ > (IK - KE) KS \end{array} \right.$

mithin $\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS \geq \frac{1}{4}KS^2 - IK \cdot KS + KI^2$

somit $\sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS} \geq \frac{1}{2}KS - KI$

demnach $KI \geq \frac{\frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS}}{KX}$

Auch ist $EH : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3.)

also $FL : GX = p : q$ (wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Macht man $E\varepsilon = KE$ und zieht $O\varepsilon$, welche den Linien IF, EH in λ, μ begegne, so ist (vermöge lib. I.

loc. V. Fall 3. Zus. 1.); wenn auch eine die Linien EH, EI, IF in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ gezogen wird, $EW : GY < E\mu : G\varepsilon$

$$\text{also } \begin{array}{l} EW : E\mu \\ FZ : F\lambda \end{array} < GY : G\varepsilon$$

$$\text{folglich } FZ : GY < F\lambda : G\varepsilon$$

mithin bestimmt der Punkt ε ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie EI.

Ferner ist, wenn $X\varepsilon < \varepsilon Y$, (vermöge desselben Zusatzes) $EH : GX > EW : GY$

$$\text{also } \begin{array}{l} EH : EW \\ FL : FZ \end{array} > GX : GY$$

$$\text{folglich } FL : GX > FZ : GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte ε näher liegenden Punkte der Linie EI größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches die Linie CI in X' schneide, so ist, wenn die die Linien EH, IC in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \quad (\text{lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 2.})$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \quad (\text{wie Fall 1. Zus. 2.})$$

mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4. ist.

$$2.) \text{ Es sey } p : q = OK + FI : 2IK, \quad (\text{Fig. 31.})$$

Beweis.

Es ist $p : q = OK + FI : 2IK$

$$\text{also } p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ OK + FI \} : 4KE \\ ON : NM \left\{ \begin{array}{l} < \{ ON \} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } MN \left\{ \begin{array}{l} > 4KE \\ KS \end{array} \right.$$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Ferner ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} = \{ OK + FI \} : 2IK \\ ON : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ KS \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} < \{ ON \} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{also } KS = 2IK$$

$$\text{folglich } K\alpha = KI \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S,$$

$$\text{mithin } KX < KI$$

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3.)

somit $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall. 1. Bew.)

Zusätze.

Buchst., wie zu N.

1.) Es sey $p : q > OK + FI : 2IK$. (Fig. 32. 33.)

Determination.

Damit der Kreis die Linie TU erreiche, muß seyn $KS \geq 4KE$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Det.)

$$\text{also } ON : \left\{ \begin{array}{l} KS \\ NM \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \{ ON : 4KE \\ < \{ ON^2 : 4KE, ON \} \end{array} \right.$$

$$p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ (OK + FI)^2 : 4IK. KO \} \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ \text{ON : } \left\{ \begin{array}{l} \text{NM} \\ \text{KS} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO \\ < \left\{ \begin{array}{l} \text{ON}^2 : 4KE \cdot \text{ON} \\ \text{ON} : 4KE \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{also } KS \geq 4KE$$

folglich berührt (Fig. 32.), oder schneidet (Fig. 33.)
der Kreis die Linie TU.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ferner ist } p : q \\ \text{ON : } \left\{ \begin{array}{l} \text{NM} \\ \text{KS} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ \text{ON} \end{array} \right\} : 2KI \end{array}$$

$$\text{also } KS < 2KI \text{ (El. V. 10.)}$$

folglich $K\alpha < KI$, wenn $K\alpha = \alpha S$,

mithin auch $KX < KI$

Ueberdies ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine in Fig. 32. die Linien EH, EI, FI in W,
Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$EW : GY < OK : GS \text{ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 1.)}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } FZ : EW &= FO : OE \\ &= NO : OK \end{aligned}$$

$$\text{also ist } FZ : GY < \left\{ \begin{array}{l} \text{ON : } \left\{ \begin{array}{l} \text{GS} \\ \text{NM} \end{array} \right\} \\ p : q \end{array} \right.$$

mithin bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = EK$,
ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der
Linie EI.

Für eine andere, die Linien EH, EI, FI in β, γ, δ schneidende gerade Linie O δ ist, wenn $\gamma\alpha > \alpha Y$,

$$E\beta : G\gamma < EW : GY \text{ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 1.)}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } F\delta : E\beta &= FO : OE \\ &= FZ : EW \end{aligned}$$

$$\text{also ist } F\delta : G\gamma < FZ : GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 33. in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie EC zwischen E, I, oder in I, oder zwischen I, S, in dem Punkte

$$X', \text{ je nachdem } KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} KX' \\ \\ K\alpha + \alpha X, \end{cases}$$

$$\text{das heisst, da } KX \cdot XS = EK \cdot KS$$

$$\begin{aligned} &K\alpha^2 - \alpha X^2 \\ &\frac{1}{4}KS^2 \end{aligned}$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS}$$

$$\text{je nachdem } KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS} \\ \\ \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS} \end{cases}$$

$$\text{folglich } KI^2 - IK \cdot KS + \frac{1}{4}KS^2 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS \\ \\ \frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot KS \end{cases}$$

$$\text{mithin } KI^2 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} IK \cdot KS - EK \cdot KS \\ \\ IE \cdot KS \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{somit } KI : IE &\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} SK \\ NM \end{cases} : KI \\ OF : FE &\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} SK \\ NM \end{cases} \\ ON : \begin{cases} NK \\ FI \end{cases} &\begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} SK \\ NM \end{cases} \end{aligned}$$

demnach $ON : NM \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} FI : IK$
 $p : q$

Auch ist, wenn die die Linien EH, FA in H', L' schneidende gerade Linie OL' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \text{ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie Fall 1. Zus. 2.)}$$

β.) Es sey $KE = EI$. (Fig. 34. 35. a.)

Determination.

Da (vermöge lib. I. loc. V. Fall 3. Det.)

$$KS \stackrel{=}{>} 4KE$$

$$\text{so wird } KS \stackrel{=}{>} 2KI$$

folglich $K\alpha \stackrel{=}{>} KI$, wenn $K\alpha = \alpha S$.

Damit der Punkt X auf EI liege, muß also seyn

$$KI \stackrel{=}{>} K\alpha - \alpha X$$

$$\text{Nun ist } KX \cdot XS = EK \cdot GS$$

also muß seyn $p : q \stackrel{=}{<} FI : IK$ (wie zu α. N. Det.)

Beweis.

$$\text{Es ist } OK : FI = KE : EI$$

$$\text{mithin } OK = FI$$

$$\text{somit } 2OK \cdot FI = OK^2 + FI^2$$

$$\text{also } 4OK \cdot FI = (OK + FI)^2$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} 4OK \cdot FI : 4IK \cdot KO \\ FI : IK \end{array} \right\} = (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO$$

$$\text{Es ist aber } p : q \stackrel{=}{<} FI : IK$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} p : q \\ ON : NM \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (OK + FI)^2 : 4IK.KO \\ ON^2 : 4KE.ON \\ ON : 4KE \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} MN \\ KS \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} 4KE$$

Demnach berührt (Fig. 34.), oder schneidet (Fig. 35. a.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $p : q = FI : IK$

also $KI = KX$ (buchst., wie α . N. Bew.)

also liegt der Punkt X auf der Linie KI.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie α . 1. Zus. 1., in Beziehung auf Fig. 34.)

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 35. a.) in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches die Linie IC in X' schneide, so ist, wenn die die Linien EH, IS in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie zu Fall 1.)

folglich ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4. ist.

7.) Es sey $KE > EI$. (Fig. 35. b.)

Determination.

Buchstäblich, wie β . Det.

Beweis.

Es ist $OK : FI = KE : EI$ also $OK > FI$ folglich $2OK \cdot FI < OK^2 + FI^2$ mithin $4OK \cdot FI < (OK + FI)^2$

somit $4OK \cdot FI : 4IK \cdot KO \left\{ \begin{array}{l} < (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO \\ FI : IK \end{array} \right.$

Es ist aber $p : q \leq FI : IK$

also $p : q \left\{ \begin{array}{l} < (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO \\ ON : NM \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} ON^2 : 4KE \cdot ON \\ ON : 4KE \end{array} \right.$

folglich $MN \left\{ \begin{array}{l} > 4KE \\ GS \end{array} \right.$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $p : q \leq FI : IK$ also $KI \leq KX$ (wie α . N. Bew.)

folglich liegt der Punkt X auf der Linie KI.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.)also $FL : GX = p : q$ (wie zu Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie α . N. Zuss. 1. 2.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA,
KC. (Fig. 34. 36—39.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. V. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. II. Fall 1.

α.) Es sey $KE > EI$. (Fig. 36. 37.)

Determination.

Vermöge lib. I. loc. V. Fall 3. Det. muß seyn

$$\left. \begin{array}{l} KS \\ MN \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} 4KE$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} ON : NM \\ p : q \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ON : 4KE \\ ON^2 : 4KE \cdot ON \\ (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO. \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ ON : NM \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (OK + FI)^2 : 4IK \cdot KO \text{ (Det.)} \\ ON : 4KE \end{array} \right.$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} MN \\ KS \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} 4KE$$

folglich berührt (Fig. 36.), oder schneidet (Fig. 37.) der Kreis die Linie TU.

Da $KE > EI$

$$\text{so ist } 2KE > \left\{ \begin{array}{l} KE + EI \\ KI \end{array} \right.$$

$$\text{also } 4KE > 2KI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} KS \\ 2K\alpha \end{array} \right\} > 2KI$$

wenn $K\alpha = \alpha S$,

mithin $K\alpha > KI$

demnach liegt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine die Linien EH, IS, IA (Fig. 36.) in W, Y, Z schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY < OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 1.)

Es ist aber $FZ : EW = FO : OE$

$= NO : OK$

also ist $FZ : GY < \begin{cases} ON : GS \\ NM \\ p : q \end{cases}$

mithin bestimmt der Punkt X , für welchen $\alpha E = EK$, ein größeres Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie IS .

Für eine andere die Linien EH, IC, IA in β, γ, δ schneidende gerade Linie $O\gamma$ ist

$E\beta : G\gamma < EW : GY$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 1.)

Es ist aber $F\delta : E\beta = FO : OE$

$= FZ : EW$

also ist $F\delta : G\gamma < FZ : GY$

mithin bestimmen die diesem Punkte X näher liegenden Punkte größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' (Fig. 37.) ein Perpendikel auf TU , so schneidet dasselbe die Linie EC zwischen I, C , oder in I , oder zwischen E, I , in einem Punkte X' ,

je nachdem $K\alpha - \alpha X' \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KI$

oder da $KX.XS = EK.KS$

$$\frac{K\alpha^2 - \alpha X'^2}{\frac{1}{4}KS^2}$$

$$\text{also } \alpha X' = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.KS}$$

je nachdem $\frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.KS} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KI$

$$\text{folglich } \frac{1}{4}KS^2 - IK.KS + KI^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{4}KS^2 - EK.KS$$

$$\text{mithin } KI^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} (IK - KE)KS \\ IE.KS \end{cases}$$

$$\text{somit } \left. \begin{matrix} SK \\ MN \end{matrix} \right\} : KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \begin{cases} KI : IE \\ OF : FE \\ ON : \begin{cases} NK \\ FI \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{demnach } MN : NO \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KI : IF$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} ON : NM \\ p : q \end{matrix} \right\} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} FI : IK$$

Auch ist $EH' : GX' = OK : GS$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie Fall 1. Zus. 2.).

β.) Es sey $KE = EI$. (Fig. 34. 38.)

Determination.

Buchst., wie α. Det.

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} = (OK + FI)^2 : 4IK.KO \\ < ON^2 : 4KE.ON \\ ON : NM \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{also } MN \left\{ \begin{array}{l} = 4KE \\ > KS \end{array} \right.$$

folglich berührt (Fig. 34.), oder schneidet (Fig. 38.)
der Kreis die Linie TU.

Da $KE = EI$

$$\text{so ist } 2KE = \left\{ \begin{array}{l} KE + EI \\ KI \end{array} \right.$$

$$\text{also } 4KE = 2KI$$

$$\text{folglich } KS \left\{ \begin{array}{l} = 2KI \\ > 2K\alpha \end{array} \right.$$

wenn $K\alpha = \alpha S$

$$\text{mithin } K\alpha \geq KI$$

somit liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Bew.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 4.

Für eine andere (Fig. 34.), die Linien EH, IA, IS
in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY < OK : GS$$

$$\text{also } FZ : GY < p : q \text{ (wie Fall 3. } \alpha. 2. \text{ Zus. 1.)}$$

folglich bestimmt dieser Punkt X ein größeres Ver-
hältniß, als jeder andere Punkt der Linie IS.

Für eine andere, die Linien EH, IA, IS in β, δ, γ
schneidende gerade Linie O δ ist, wenn $\gamma\alpha > \alpha Y$,

$$\underline{E\beta : G\gamma < EW : GY}$$

also $F\delta : G\gamma < FZ : GY$ (wie ebendasselbst)
 folglich bestimmen die dem Punkte X näher liegenden
 Punkte grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 38.) in dem zweiten Durch-
 schnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Per-
 pendikel auf TU, so schneidet dasselbe u. s. w.
 buchst., wie zu α . Zus. 2.

γ .) Es sey $KE < EI$. (Fig. 39.)

N.) Es sey $p : q < OK + FI : 2KI$. (Fig. 39. a.)

Beweis.

$$\text{Da } p : q < OK + FI : 2KI$$

$$\text{so ist auch } \left. \begin{array}{l} p : q \\ ON : NM \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} OK + FI \\ ON \end{array} \right\} : 4KE$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} MN \\ KS \end{array} \right\} > 4KE$$

folglich schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da } \left. \begin{array}{l} p : q \\ ON : NM \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} OK + FI \\ ON \end{array} \right\} : 2KI$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} MN \\ 2K\alpha \end{array} \right\} > 2KI$$

wenn $K\alpha = \alpha S$,

$$\text{also } K\alpha > KI$$

folglich liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $\underline{EH : GX = OK : GS}$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Macht man $E\varepsilon = EK$, und zieht die, die Linien EH, FI in μ, λ schneidende gerade Linie $O\varepsilon$, so ist (vermöge lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 1.), wenn auch eine die Linien EH, IS, IA in W, Y, Z schneidende gerade Linie OY gezogen wird, $EW : GY < E\mu : G\varepsilon$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} EW : E\mu \\ FZ : F\lambda \end{array} \right\} < GY : G\varepsilon$$

$$\text{folglich } FZ : GY < F\lambda : G\varepsilon$$

mithin bestimmt der Punkt ε ein größeres Verhältniß, als jeder Punkt der Linie εS .

Ferner ist, wenn $X\varepsilon > \varepsilon Y$, $EH : GX < EW : GY$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} EH : EW \\ FL : FZ \end{array} \right\} < GX : GY$$

$$\text{folglich } FL : GX < FZ : GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IS größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie α . Zus. 2.

2.) Es sey $p : q = OK + FI : 2KI$. (Fig. 39. b.)

Beweis.

$$\text{Da } p : q = OK + FI : 2KI$$

$$\text{so ist } p : q \left\{ < \begin{array}{l} OK + FI \\ ON \end{array} \right\} : 4KE$$

$$ON : NM \left\{ \begin{array}{l} \\ ON \end{array} \right\}$$

$$\text{also } MN \left\{ > 4KE \right.$$

$$KS \left\{ \right.$$

folglich schneidet der Kreis die Linie TU .

$$\frac{\text{Da } p : q \left\{ \begin{array}{l} = \{OK + FI\} : 2KI \\ \text{ON} : NM \end{array} \right.}{\text{so ist MN} \left\{ \begin{array}{l} = 2KI \\ KS \\ 2K\alpha \end{array} \right.} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{also } K\alpha = KI$$

folglich liegt der Punkt X auf der Linie IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie N. Zus. 1.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches die Linie EI in X' schneide, so ist, wenn die, die Linien EH, IF in H', L' schneidende gerade Linie OL' gezogen wird, (verm. lib. I. loc. V. Fall 3. Zus. 2.) $EH' : GX' = OK : GS$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie Fall 1. Zus. 2.)

folglich ist auch eine Linie OL' gefunden, welche von den Linien GI, IF Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

1.) Es sey $p : q > OK + FI : 2KI$. (Fig. 39. c.)

Determination.

Vermöge lib. I. loc. V. Fall 3. Det. muß seyn

$$\frac{KS}{>} 4KE$$

also $p : q \stackrel{=}{<} (OK + FI)^2 : 4IK.KO$ (wie zu α .)

$$\frac{\text{Da } p : q \left\{ \begin{array}{l} > \{OK + FI\} : 2KI \\ ON : \{NM\} \\ \quad \{KS\} \end{array} \right.}{}$$

$$\text{so ist } KS \left\{ \begin{array}{l} < 2KI \\ 2K\alpha \end{array} \right.$$

wenn $K\alpha = \alpha S$

$$\text{also } K\alpha < KI$$

Damit nun der Punkt X auf IC falle, muſs

$$KI \stackrel{=}{<} K\alpha + \alpha X \text{ seyn.}$$

$$\text{Es ist aber } KX.XS \left\{ \begin{array}{l} = EK.GS \\ K\alpha^2 \left\{ - \alpha X^2 \right\} \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{folglich muſs seyn } KI \stackrel{=}{<} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \stackrel{=}{<} \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} (IK - KE)GS \\ IE.GS \end{array} \right.$$

$$\text{demnach } GS \left\{ \begin{array}{l} : IK \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ ON : \left\{ \begin{array}{l} NK \\ FI \end{array} \right\} \end{array} \right. \\ MN \end{array} \right.$$

$$\text{also } MN : NO \left\{ \begin{array}{l} = KI : IF \\ q : p \end{array} \right. >$$

$$\text{folglich } p : q \stackrel{=}{>} FI : IK$$

Beweis.

Es ist $p : q = (OK + FI)^2 : 4IK.KO$ (Det.)

also $KS = 4KE$ (wie zu α .)

folglich schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $p : q = FI : IK$

also $KI = KX$ (wie leicht aus der Det. erhellet.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. V. Fall 3.)

also $FL : GX = p : q$ (wie Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie $\aleph$. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie $\beth$. Zus. 2.

B.) auf der Verlängerung von IK.
(Fig. 40—49.) (Loc. III.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 40.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 1. Bew. ist

$$\underline{EH : GX = VG : GS}$$

also $FL : GX = p : q$ (w. zu lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 1. ist, wenn die, die Linien AB, EH, CD in Z, W, Y schneidende gerade Linie OY gezogen wird, $EW : GY \gtrless VG : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases}$

also auch $FZ : GY \gtrless p : q$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie SD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 2. ist, wenn man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU aufrichtet, welches den Linien KE, EH, FB in X', H', L' begegnet, $\underline{EH' : GX' = VG : GS}$

also $FL' : GX' = p : q$ (w. zu lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Es ist mithin auch eine von den Linien FB, GI Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidende gerade Linie OL' gefunden, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GK. (Fig. 41. 42.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 2.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 2. Det. muß seyn

$$GS \stackrel{=}{<} GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ OK + FI \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \stackrel{=}{>} \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ (Det.)}$$

$$VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\}$$

$$\text{folglich } GS \stackrel{=}{<} GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 41.), oder schneidet (Fig. 42.) der Kreis die Linie TU, so daß

$$EH : GX = VG : GS \text{ (lib. I. loc. VII. Fall 2. Bew.)}$$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie zu lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 1. ist in Fig. 41., wenn die gerade Linie OY gezogen wird, welche die Linien KS, EH, AB in Y, W, Z schneide,

$$EW : GY > VG : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\}$$

$$\text{Es ist aber } FZ : EW = FO : OE$$

$$= NV : VG$$

$$\text{also ist } FZ : GY > \left\{ \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\}$$

mithin bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie KS.

Ferner ist (vermöge desselben Zus.), wenn die die Linien KS, EH, AB in γ, β, δ schneidende gerade Linie O γ gezogen wird, und $\gamma X > YX$ ist,

$$EW : GY < E\beta : G\gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } FZ : EW &= FO : OE \\ &= F\delta : E\beta \end{aligned}$$

$$\text{also ist auch } FZ : GY < F\delta : G\gamma$$

mithin bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte der Linie KS kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 42. in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein die Linie KS in X' schneidendes Perpendikel auf TU, und zieht man die die Linien EH, AB in H', L' schneidende gerade Linie OX', so ist (vermöge lib. I. loc. VII. Zus. 2.) $EH' : GX' = OK : GS$

also $FL' : GX' = p : q$ (w. z. lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)
mithin ist eine zweite Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GK Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 40.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man X', H', L' statt X, H, L setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man R', X', H', L' statt R, X, H, L setzt.

Beweis.

Es ist $EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Bew.)

also $FL' : GX' = p : q$ (w. z. lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EK, EH, FB in Y', W', Z' schneidende gerade Linie OZ' ist

$$EW' : GY' \leq OK : GS \text{ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Z. 1.)}$$

Es ist aber $FZ' : EW' = FO : OE$

$$= NV : VG$$

$$\text{also ist } FZ' : GY' \leq \begin{cases} NV : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases} \\ p : q \end{cases}$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R der Linie TU und des Kreises ein die Linie GD in X' schneidendes Perpendikel auf TU , so ist, wenn die die Linien EH, AB in H, L schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Zus. 2.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, IG. (Fig. 43–46.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

α.) Es sey $EI = \sqrt{GE \cdot EK}$. (Fig. 43. 44.)

Determination.

Da (vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. Det.)

$$GS \underset{>}{=} GE + EK + \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{GE \cdot EK} \\ 2EI \end{array} \right. \text{ werden mu\ss,}$$

$$\text{so wird } KS \left\{ \begin{array}{l} \underset{>}{=} 2KI \\ 2K\alpha \end{array} \right. \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S,$$

$$\text{also } K\alpha \underset{>}{=} KI$$

folglich mu\ss, damit der Punkt X auf EI falle, werden $KI \underset{>}{=} K\alpha - \alpha X$.

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} KX \cdot XS \\ K\alpha^2 - \alpha X^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} = EK \cdot GS$$

$$\text{also } \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS} = \alpha X$$

$$\text{folglich mu\ss seyn } KI = \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{mithin } \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS = \frac{1}{4}KS^2 - IK.KS + KI^2$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } IK.KS \} - EK.GS \} = KI^2 \\ IK(SG - GK) \} \\ (IK - KE)GS \} - IK.KG \} \\ EI.GS \} \end{array}$$

$$\text{demnach } EI.GS = \begin{cases} KI(IK + KG) \\ KI.IG \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } KI : IE \} = \begin{cases} SG \\ NM \end{cases} : GI \\ OF : FE \} \\ VN : NG \} \end{array}$$

$$\text{folglich } VN : NM \} = \begin{cases} NG \\ FI \end{cases} : GI \\ p : q \} \end{array}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \sqrt{GE.EK} = EI$$

$$\text{also } GE.EK + EI^2 = 2EI\sqrt{GE.EK}$$

$$\text{folglich } GE.EK = (2\sqrt{GE.EK} - EI)EI$$

$$\text{mithin } IE : EK \} = GE : 2\sqrt{GE.EK} - EI$$

$$\begin{array}{l} FI : OK \} = \begin{cases} GE + EI \\ IG \end{cases} : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} - IG \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{somit } FI : IG = OK : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} - IG \\ = OK + FI : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} \end{array}$$

Da nun $p : q = FI : IG$

$$\text{so ist } p : q = \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \\ GS \end{array} \right\}$$

$$\text{also } GS = GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

folglich berührt (Fig. 43.), oder schneidet (Fig. 44.)
der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da ferner } p : q = FI : IG \\ VN : NM = NG$$

$$\text{so ist } VN : NG = MN : IG \\ OF : FE = GS \\ KI : IE$$

$$\text{also } KI \cdot IG = IE \cdot GS \\ KI(IK + KG) = (IK - KE)GS$$

$$\text{folglich } KI^2 = \left\{ \begin{array}{l} IK(SG - GK) \\ IK \cdot KS \end{array} \right\} - KE \cdot GS$$

$$\text{mithin } \frac{1}{4}KS^2 - IK \cdot KS + KI^2 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}KS^2 - KE \cdot GS \\ \alpha X^2 \end{array} \right.$$

$$\text{somit } \frac{1}{2}KS - \alpha X = KI \\ KX$$

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (w. z. lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 1. (Fig. 43.)
ist für eine andere die Linien EH, ES, AB in W, Y, Z
schneidende gerade Linie OZ, $EW : GY < VG : GS$

$$\text{Es ist aber } FZ : EW = FO : OE \\ = NV : VG$$

$$\text{also } FZ : GY < \left\{ \begin{array}{l} NV : GS \\ NM \\ p : q \end{array} \right.$$

also bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie EI.

Da auch, wenn die, die Linien EH, AB, IF in β, δ, γ schneidende gerade Linie O γ gezogen wird (verm. desselben Zus.), wenn $\gamma I > IY$, $EW : GY > E\beta : G\gamma$

$$\text{Es ist aber } FZ : EW = FO : OE \\ = F\delta : E\beta$$

$$\text{also ist } FZ : GY > F\delta : G\gamma$$

folglich bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte der Linie EI größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 44.) in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, welches die Linie IS in X' schneide, so ist, wenn die, die Linien EH, AB in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \text{ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)}$$

folglich ist eine Linie gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 5. ist.

$$\beta.) \text{ Es sey } EI < \sqrt{GE \cdot EK}. \text{ (Fig. 44.)}$$

Determination.

Da vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. Det.

$$GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ werden mufs,}$$

$$\text{so wird } GS > GE + EK + 2EI$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KS \\ 2K\alpha \end{array} \right\} > 2KI \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S,$$

folglich $K\alpha > KI$.

Damit der Punkt X auf EI falle, mufs also

$$KI \geq K\alpha - \alpha X \text{ seyn.}$$

$$\text{Nun ist } KX \cdot XS = EK \cdot GS$$

$$\text{also mufs } p : q \leq FI : IG \text{ seyn (wie zu } \alpha \text{).}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \sqrt{GE \cdot EK} > EI$$

$$\text{also } GE \cdot EK + EI^2 > 2\sqrt{GE \cdot EK} \cdot EI \text{ (El. II. 9. 7.)}$$

$$\text{folglich } GE \cdot EK > (2\sqrt{GE \cdot EK} - EI)EI$$

$$\text{mithin } IE : EK < GE : 2\sqrt{GE \cdot EK} - EI$$

somit

$$IE : EK \left\{ \begin{array}{l} < \{ GE + EI \} : \{ EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - EI \} \text{ (Haub. §. 44.)} \\ < \{ GI \} : \{ GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG \} \end{array} \right.$$

$$FI : OK \left\{ \begin{array}{l} < \{ GE + EI \} : \{ EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - EI \} \text{ (Haub. §. 44.)} \\ < \{ GI \} : \{ GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG \} \end{array} \right.$$

$$\text{demnach } FI : IG < OK : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG$$

$$\text{also } FI : IG < OK + FI : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ (Haub. §. 44.)}$$

$$\text{folglich } p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ OK + FI \} \\ < \{ VN \} \end{array} \right. : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\}$$

mithin $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$
 also schneidet der Kreis die Linie TU.

Da ferner $p : q = FI : IG$

so ist $KX = KI$ (wie zu α .)

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Macht man $E\epsilon = \sqrt{GE \cdot EK}$, und zieht die, die Linien EH, IA in μ, λ schneidende gerade Linie O ϵ , so ist, wenn auch eine die Linien EH, EI, IF in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ gezogen wird,

$$EW : GY < E\mu : G\epsilon \text{ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } EW : E\mu \left\{ \begin{array}{l} < GY : G\epsilon \\ FZ : F\lambda \end{array} \right.$$

folglich $FZ : GY < F\lambda : G\epsilon$
 mithin bestimmt der Punkt ϵ ein größeres Verhältniß, als jeder Punkt der Linie EI.

Ferner ist, wenn $X\epsilon > Y\epsilon$ (verm. desselben Zus.)

$$EH : GX < EW : GY$$

$$\text{also } EH : EW \left\{ \begin{array}{l} < GX : GY \\ FL : FZ \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } FL : GX < FZ : GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie Eε grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie α. Zus. 2.

γ.) Es sey $EI > \sqrt{GE \cdot EK}$. (Fig. 44. 45. 46.)

κ.) Es sey $p : q < OK + FI : GI + IK$. (Fig. 44.)

Determination.

$$\begin{array}{l} \text{Da } p : q \left\{ < \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} : GI + IK \right. \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \left\{ > \begin{array}{l} VN \end{array} \right\} \end{array}$$

so ist $GS > GI + IK$

also $KS \left\{ > 2KI \right.$

$2K\alpha \left\{$

wenn $K\alpha = \alpha S$

folglich $K\alpha > KI$

Damit der Punkt X auf EI falle, muß mithin $KI \stackrel{=}{>} K\alpha - \alpha X$ werden.

Nun ist $KX \cdot XS = EK \cdot GS$

also muß $p : q \stackrel{=}{<} FI : IG$ seyn (wie zu α.).

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \left\{ < \begin{array}{l} OK + FI \\ ON \end{array} : GI + IK \text{ (p. hyp.)} \right. \\ ON : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \left\{ > \begin{array}{l} ON \end{array} \right\} \end{array}$$

also $GS > \begin{array}{l} GI + IK \\ GE + EK + 2EI \end{array}$

folglich $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$
mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $p : q = FI : IG$

also $KI > KX$ (wie zu α .)

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie β . Zuss. 1. 2., wenn nur ε zwischen E, I genommen wird.

2.) Es sey $p : q = OK + FI : GI + IK$. (Fig. 45. a.)

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q = \{OK + FI\} : GI + IK \\ \text{ON : } \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} ON \\ \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } GS = GI + IK \\ \quad = GE + EK + 2EI \end{array}$$

folglich $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$
mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $SG - GK = 2KI$

$$\left. \begin{array}{l} KS \\ 2K\alpha \end{array} \right\} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

also $K\alpha = KI$

folglich fällt der Punkt X auf EI.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie N. Zuss. 1. 2.

1.) Es sey $p:q > OK+FI:GI+IK$. (Fig. 45. b. 46.)

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. Det. muß seyn

$$GS \underset{>}{=} GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \underset{p:q}{\underset{<}{=}} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ OK+FI \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p:q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \underset{<}{=} \left\{ \begin{array}{l} OK+FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{folglich } GS \underset{>}{=} GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 45. b.), oder schneidet (Fig. 46.)
der Kreis die Linie TU.

$$\begin{array}{l} \text{Ferner ist } p:q \\ ON : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} > OK+FI:GI+IK$$

$$\text{also } GS < GI+IK$$

$$\text{folglich } KS \left\{ \begin{array}{l} < 2KI \\ 2K\alpha \end{array} \right\}$$

wenn $K\alpha = \alpha S$

$$\text{mithin } K\alpha < KI$$

Der Punkt X liegt also auf EI.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$

also $FL : GX = p : q$

Zus. 1.

Buchst., wie α . Zus. 1., wenn Fig. 45. b. statt Fig. 43. gesetzt wird.

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 46.) in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU , so schneidet dasselbe die Linie EI in einem Punkte X' zwischen E, I , oder in I , oder

zwischen I, C , je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} K\alpha + \alpha X'$,

oder, da $KX'.X'S = EK.GS$

also $\alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$

je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$

also $KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$

folglich $KI^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} \{ IK.KS \} - EK.GS \\ \{ IK(SG.GK) \} \\ \{ IE.GS - IK.KG \} \end{cases}$

mithin $KI(IK + KG) \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} IE.GS \\ KI.IG \end{cases}$

somit $KI : IE \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} SG \\ MN \end{cases} : GI$
 $OF : FE \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} SG \\ MN \end{cases}$
 $VN : NG$

$$\text{demnach } \begin{matrix} \text{VN : NM} \\ p : q \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{NG : GI} \\ \text{FI : IG} \end{matrix}$$

Auch ist $\text{EH}' : \text{GX}' = \text{OK} : \text{GS}$ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 1.)

also $\text{FL}' : \text{GX}' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GC. (Fig. 43. 47—49.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 4.

α.) Es sey $\text{EI} = \sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$. (Fig. 43. 47.)

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. muß seyn

$$\text{GS} \geq \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

$$\text{also } \begin{matrix} \text{VN : } \left\{ \begin{matrix} \text{GS} \\ \text{NM} \end{matrix} \right\} \\ p : q \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{VN} \\ \text{OK} + \text{FI} \end{matrix} : \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

Beweis.

$$\begin{matrix} \text{Es ist } p : q \\ \text{VN : } \left\{ \begin{matrix} \text{NM} \\ \text{GS} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{OK} + \text{FI} \\ \text{VN} \end{matrix} : \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

$$\text{folglich } \text{GS} \geq \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

mithin berührt (Fig. 43.), oder schneidet (Fig. 47.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $GS \geq GE + EK + 2EI$

also $GS - GK \geq 2KI$ wenn $K\alpha = \alpha S$

folglich $K\alpha \geq KI$

mithin liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie Fall 4. α . Zus. 1., wenn IS, IA statt EI, IF gesetzt werden.

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 47.) auch in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie EC zwischen I, C, oder in I, oder zwischen I, E,

je nachdem $KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} K\alpha - \alpha X'$

oder, da $KX' \cdot X'S = EK \cdot GS$
 $K\alpha^2 - \alpha X'^2 = \frac{1}{4}KS^2$

also $\sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS} = \alpha X'$

je nachdem $KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$

also $KI^2 - IK \cdot KS + \frac{1}{4}KS^2 \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS$

$$\text{folglich } KI^2 \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(SG-GK) \\ IE.GS-IE.KG \end{array} \right\} - EK.GS$$

$$\text{mithin } KI.IG \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} IE.GS$$

$$\text{somit } \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{demnach } \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right\}$$

Auch ist $EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

β.) Es sey $EI < \sqrt{GE.EK}$. (Fig. 49. 47.)

Determination.

Buchstäblich, wie zu α.

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} OK+FI \\ VN \end{array} \right\} : GE+EK+2\sqrt{GE.EK}$$

$$\text{folglich } GS \geq GE+EK+2\sqrt{GE.EK}$$

mithin berührt (Fig. 49.), oder schneidet (Fig. 47.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $GS > GE + EK + 2EI$

$$\text{also } \frac{KS}{2K\alpha} > 2KI$$

wenn $K\alpha \neq \alpha S$

folglich $K\alpha > KI$

mithin liegt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie α . Zuss. 1. 2.

γ .) Es sey $EI > \sqrt{GE \cdot EK}$. (Fig. 47. 48.)

N.) Es sey $p : q < OK + FI : GI + IK$. (Fig. 47.)

Beweis.

Es ist $EI > \sqrt{GE \cdot EK}$

$$\text{also } \frac{GE + EK + 2EI}{GI + IK} > \frac{GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}}{GI + IK}$$

folglich

$$OK + FI : GI + IK < \frac{OK + FI}{VN} : \frac{GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}}{VN}$$

$$\text{mithin } \frac{p : q}{VN : \begin{Bmatrix} NM \\ GS \end{Bmatrix}} < \frac{VN : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}}{VN : \begin{Bmatrix} NM \\ GS \end{Bmatrix}}$$

somit $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$

demnach schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da ferner } \left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : GS \end{array} \right\} < VN : GI + IK$$

$$\text{so ist } GS > GI + IK$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KS \\ 2K\alpha \end{array} \right\} > 2KI$$

$$\text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{folglich } K\alpha > KI$$

mithin liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Macht man $E\varepsilon = \sqrt{GE \cdot EK}$, und zieht $O\varepsilon$, welche die Linien EH, IF' in μ, λ schneide, so ist, wenn auch die, die Linien EH, IA, IS in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY gezogen wird, (verm. lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 1.) $EW : GY < E\mu : E\varepsilon$, also bestimmt (wie Fall 4. β . Zus. 1.) der Punkt ε ein größeres Verhältniß, als jeder Punkt der Linie IS. Auch ist, wenn $X\varepsilon > Y\varepsilon$, $FL : GX < FZ : GY$ (vermöge desselben Zus.), also bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IS größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie α . Zus. 2.

2.) Es sey $p : q = OK + FI : GI + IK$. (Fig. 48. a.)

Beweis.

$$\text{Es ist } EI > \sqrt{GE \cdot EK}$$

also $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$, (wie N. Bew.)
 folglich schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\begin{array}{l} \text{Da ferner } p : q \} = \{ OK + FI \} : GI + IK \\ VN : \{ NM \} \} \quad \{ VN \} \\ \quad \{ GS \} \end{array}$$

so ist $GS = GI + IK$

$$\begin{array}{l} \text{also } KS \} = 2KI \\ 2K\alpha \} \end{array} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

folglich $K\alpha = KI$

mithin liegt der Punkt X auf IC.
 Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie N. Zus. 1.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie EI in X' so, daß $EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.),
 welches Fall 4. ist.

1.) Es sey $p : q > OK + FI : GI + IK$. (Fig. 48. b.)

Determination.

$$\begin{array}{l} \text{Da } p : q \} > \{ OK + FI \} : GI + IK \\ VN : \{ NM \} \} \quad \{ VN \} \\ \quad \{ GS \} \end{array}$$

so wird $GS < GI + IK$

$$\text{folglich } \frac{KS}{2K\alpha} < \frac{2KI}{2K\alpha} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

mithin $K\alpha < KI$

Damit der Punkt X auf IC falle, muß also $KI = K\alpha + \alpha X$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{folglich muß seyn } KI = \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 = \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 = \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(SG - GK) \\ IE.GS - IK.KG \end{array} \right\} - EK.GS$$

$$\text{demnach } \frac{KI(IK + KG)}{KI.IG} = \frac{IE.GS}{KI.IG}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right\}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \sqrt{GE.EK} < EI$$

$$\text{also } GE.EK + EI^2 > 2EI\sqrt{GE.EK} \quad (\text{El. II. 9. 5.})$$

folglich $\underline{GE \cdot EK > EI(2\sqrt{GE \cdot EK} - EI)}$

mithin $\underline{IE : EK < GE : 2\sqrt{GE \cdot EK} - EI}$

somit $\left. \begin{array}{l} IE : EK \\ FI : OK \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} GE + EI : EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - EI \\ GI : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \cdot IG \end{array} \right.$

demnach $\underline{FI : IG < OK : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG}$

also $\underline{FI : IG < OK + FI : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}}$

folglich $\left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$

mithin $\underline{GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}}$

Der Kreis schneidet also die Linie T U.

Ferner ist $\left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : NM \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} FI \\ NG \end{array} \right\} : IG$

also $\left. \begin{array}{l} VN : NG \\ OF : FE \\ KI : IE \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} MN \\ SG \end{array} \right\} : GI$

folglich $\left. \begin{array}{l} KI \cdot IG \\ KI(IK + KG) \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} IE \cdot SG \\ (IK - KE)GS \end{array} \right.$

mithin $\left. \begin{array}{l} KI^2 \\ \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} IK(SG - GK) \\ IK \cdot KS \end{array} \right\} - KE \cdot GS$

somit $\underline{KI^2 - IK \cdot KS + \frac{1}{4}KS^2 \overset{=}{<} \frac{1}{4}KS^2 - KE \cdot GS}$

$$\text{demnach } KI = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - KE \cdot GS} \\ \alpha X \\ KX \end{array} \right.$$

also liegt X' auf IS .

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie zu lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie N. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie 2. Zus. 2.

C.) auf IK . (Fig. 50 — 69.) Bezeichnet man den Durchschnitt der Linien OF , CD mit E , so liege der Punkt G

a.) auf der Linie KE . (Fig. 50 — 60.).
(Loc. IV.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA , GD . (Fig. 50.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, FA, SD in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY ist

$$\underline{EW : GY \lesseqgtr VG : GS}$$

$$\text{also } FZ : GY \lesseqgtr p : q$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie SD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie GE in einem Punkte X' so, dass, wenn die, die Linien EH, FB in den Punkten H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$\underline{EH' : GX' = OK : GS} \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

folglich ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB, GI Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien GK, FB. (Fig. 51. 52.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Kreis die Linie TU erreiche, muß seyn

$$GS \leq GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK} \quad (\text{lib. I. loc. VI. Fall 2. Det.})$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ OK + FI \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK} \quad (\text{Det.})$$

$$\text{folglich } GS \leq GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 51.), oder schneidet (Fig. 52.)
der Kreis die Linie TU, so daß

$$EH : GX = OK : GS \quad (\text{lib. I. loc. VI. Fall 2. Bew.})$$

$$\text{also ist } FL : GX = p : q \quad (\text{wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.})$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 51. die Linien KG, EH,
FB in Y, W, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$EW : GY > VG : GS \quad (\text{lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 1.})$$

$$\text{Es ist aber } FZ : EW = FO : OE$$

$$= NV : VG$$

$$\text{also ist } FZ : GY > \left\{ \begin{array}{l} VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\} \\ p : q \end{array} \right.$$

folglich bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = \sqrt{GE \cdot EK}$ ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie KS.

Auch ist für eine die Linien KG, EH, FB in γ , β , δ schneidende gerade Linie O δ , wenn $\gamma X > XY$,

$$E\beta : G\gamma > EW : GY \quad (\text{lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 1.})$$

$$\text{Es ist aber } F\delta : E\beta = FO : OE$$

$$= FZ : EW$$

$$\text{also ist } F\delta : G\gamma > FZ : GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte der Linie KG kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 52. in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie KS in X' so, dafs, wenn die, die Linien EH, FB in H', L' schneidende gerade Linie OL' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \quad (\text{lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 2.})$$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.) folglich ist eine zweite Linie OX' gefunden, welche von den Linien GK, FB Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GC. (Fig. 50.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man daselbst X', H', L' statt X, H, L setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn da-
selbst R', X', H', L' statt R, X, H, L gesetzt wird.

Beweis.

Es ist $\underline{EH' : GX' = OK : GS}$ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Bew.)

also $\underline{FL' : GX' = p : q}$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EG, EH, FB in
 Y', W', Z' schneidende gerade Linie OZ' ist

$$EW' : GY' \leq VG : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 1.)}$$

Es ist aber $FZ' : EW' = FO : OE$

$$= VN : VG$$

also ist $FZ' : GY' \leq \begin{cases} VN : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases} \\ p : q \end{cases}$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegen-
den Punkte der Linie GE kleinere Verhältnisse, als
die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R
des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf
 TU , so schneidet dasselbe die Linie KD in X so,
daß, wenn die, die Linien EH, FA in H, L schnei-
dende gerade Linie OX gezogen wird,

$$\underline{EH : GX = OK : GS} \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 2.)}$$

also $\underline{FL : GX = p : q}$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

mithin ist auch eine Linie OX gefunden, welche
von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebe-
nen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, IE. (Fig. 53–57.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

$\alpha.$) Es sey $EI = \sqrt{KE \cdot EG}$. (Fig. 53. 54.)

Determination.

Da $GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Det.)
werden mufs, so wird $GS \geq GE + EK + 2EI$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KS \\ 2K\alpha \end{array} \right\} \geq 2KI \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

folglich $K\alpha \geq KI$

Damit der Punkt X auf EI falle, mufs also $KI \geq K\alpha - \alpha X$ werden.

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} KX \cdot XS \\ K\alpha^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} = EK \cdot GS - \alpha X^2$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$$

folglich muſs ſeyn $KI \geq \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$

mithin $\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS \geq \frac{1}{4}KS^2 - IK.KS + KI^2$

somit $\left. \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(KG + GS) \\ (IK - KE)GS \\ IE.GS \end{array} \right\} - EK.GS \geq KI^2$

demnach $IE.GS \geq \left\{ \begin{array}{l} KI(IK - KG) \\ KI.IG \end{array} \right.$

also $\left. \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} SG \\ NM \end{array} \right\} : GI$

folglich $\left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} NG \\ FI \end{array} \right\} : IG$

Beweis.

Es ist $EI = \sqrt{GE.EK}$

also $GE.EK + EI^2 = 2EI\sqrt{GE.EK}$

folglich $GE.EK = (2\sqrt{GE.EK} - EI)IE$

mithin $IE : EK = GE : 2\sqrt{GE.EK} - EI$

$\left. \begin{array}{l} FI : OK \\ GI \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} GE + EI \\ GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} - IG \end{array} \right.$

somit $FI : IG = OK : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} - IG$

$= \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 53. die Linien EI, EH, FI in Y, W, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$EW : GY < \begin{cases} EH : GX \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.)} \\ OK : GS \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } FZ : EW &= FO : OE \\ &= NV : VG \end{aligned}$$

$$\text{also ist } FZ : GY < \begin{cases} NV : \begin{cases} GS \\ MN \end{cases} \\ p : q \end{cases}$$

mithin bestimmt der Punkt X ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie EI.

Ferner ist für eine andere, die Linien EH, EI, FI in β, γ, δ schneidende gerade Linie O δ , wenn $\gamma X > XY$,

$$EW : GY > E\beta : G\gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } FZ : EW &= FO : OE \\ &= F\delta : E\beta \end{aligned}$$

$$\text{also ist } FZ : GY > F\delta : G\gamma$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EI größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 54. in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie IC so, daß, wenn die, die Linien EH, IA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)}$$

Es ist mithin eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA , GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 5. ist.

β.) Es sey $EI < \sqrt{GE.EK}$. (Fig. 54.)

Determination.

Da $GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Det.)

werden muß, so wird $GS \geq GE + EK + 2EI$

$$\text{also } KS \geq \begin{cases} 2(EK + EI) \\ 2KI \end{cases}$$

folglich $K\alpha \geq KI$ wenn $K\alpha = \alpha S$

mithin muß $KI \geq K\alpha - \alpha X$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

also $p : q \leq FI : IG$ (wie zu α .)

Beweis.

Es ist $EI < \sqrt{GE.EK}$

mithin $GE.EK + EI^2 > 2EI\sqrt{GE.EK}$

somit $GE.EK > (2\sqrt{GE.EK} - EI)EI$

also $IE : EK < GE : 2\sqrt{GE.EK} - \begin{cases} EI \\ IG - GE \end{cases}$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{IE:EK} \\ \text{FI:OK} \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} \{ \text{GE+EI} \} : \text{GE+EK+2}\sqrt{\text{GE.EK}} - \text{IG} \\ \text{IG} \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } \text{FI : IG} < \text{OK : GE+EK+2}\sqrt{\text{GE.EK}} - \text{IG}$$

$$\text{somit } \text{FI : IG} < \text{OK+FI : GE+EK+2}\sqrt{\text{GE.EK}}$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} p : q \\ \text{VN : } \left\{ \begin{array}{l} \text{NM} \\ \text{GS} \end{array} \right\} \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} \{ \text{OK+FI} \} : \text{GE+EK+2}\sqrt{\text{GE.EK}} \\ \text{VN} \end{array} \right\}$$

$$\text{also } \text{GS} > \text{GE+EK+2}\sqrt{\text{GE.EK}}$$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da ferner } p : q \stackrel{=}{<} \text{FI : IG (Det.)}$$

$$\text{so ist } \text{KX} \stackrel{=}{<} \text{KI (wie zu } \alpha.)$$

Auch ist $\text{EH : GX} = \text{OK : GS}$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

$$\text{also } \text{FL : GX} = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Macht man $\text{E}\epsilon = \sqrt{\text{GE.EK}}$, so bestimmt (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.) der Punkt ϵ ein größeres Verhältniß, als jeder Punkt der Linie EI, und jeder dem Punkte ϵ näher liegende Punkt derselben ein größeres Verhältniß, als der entferntere, welches bewiesen wird, wie lib. II. loc. III. Fall 4. β . Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie α . Zus. 2.

$$\gamma.) \text{ Es sey } \text{EI} > \sqrt{\text{GE.EK.}} \text{ (Fig. 54. 55.)}$$

N.) Es sey $p : q < OK + FI : GI + IK$. (Fig. 54.)

Determination.

$$\begin{array}{l} \text{Da } p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ OK + FI \} : GI + IK \\ VN : \{ NM \} \left\{ \begin{array}{l} < \{ VN \} \end{array} \right\} \\ \{ GS \} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{also } GS > GI + IK$$

$$\text{folglich } \frac{GS + GK}{2K\alpha} \left\{ \begin{array}{l} > 2KI \\ \text{wenn } K\alpha \doteq \alpha S \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } K\alpha > KI$$

Damit der Punkt X auf EI falle, muß also seyn

$$KI \doteq K\alpha - \alpha X$$

$$\text{folglich } p : q \doteq FI : IG \text{ (wie zu } \alpha \text{).}$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} < \{ OK + FI \} : GI + IK \\ VN : \{ NM \} \left\{ \begin{array}{l} < \{ VN \} \\ \{ GS \} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\text{also } GS > \left\{ \begin{array}{l} GI + IK \\ KE + EG + 2EI \end{array} \right.$$

$$\text{folglich } GS > KE + EG + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Ferner ist } p : q \doteq FI : IG \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } KI \doteq \left\{ \begin{array}{l} K\alpha - \alpha X \\ KX \end{array} \right.$$

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie β . Zuss. 1. 2.

2.) Es sey $p : q = OK + FI : GI + IK$. (Fig. 55.)

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Da } p : q \\ \text{VN : } \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GI + IK$$

$$\text{so ist } GS = \left\{ \begin{array}{l} GI + IK \\ KE + EG + 2EI \end{array} \right.$$

folglich $GS > KE + EG + 2\sqrt{KE \cdot EG}$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ferner ist } SG + GK \\ 2K\alpha \end{array} \right\} = 2KI$$

wenn $K\alpha = \alpha S$

$$\text{also } K\alpha = KI$$

demnach liegt der Punkt X auf EI.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie β . Zuss. 1. 2.

1.) Es sey $p : q > OK + FI : GI + IK$. (Fig. 56. 57.)

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4. Det. muß

$$GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ seyn}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{VN} : \{ \text{NM} \} \\ \{ \text{GS} \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{VN} \\ \{ \text{OK} + \text{FI} \} \end{array} \right\} : \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ \text{VN} : \text{GS} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left. \begin{array}{l} \{ \text{OK} + \text{FI} \} \\ \text{VN} \end{array} \right\} : \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

$$\text{folglich } \text{GS} \geq \text{GE} + \text{EK} + 2\sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$$

mithin berührt (Fig. 56.), oder schneidet (Fig. 57.)
der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da ferner } \left. \begin{array}{l} p : q \\ \text{VN} : \text{GS} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \left. \begin{array}{l} \{ \text{OK} + \text{FI} \} \\ \text{VN} \end{array} \right\} : \text{GI} + \text{IK}$$

$$\text{so ist } \text{GS} < \text{GI} + \text{IK}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} \text{GS} + \text{GK} \\ 2\text{K}\alpha \end{array} \right\} < 2\text{KI} \quad \text{wenn } \text{K}\alpha = \alpha\text{S}$$

$$\text{folglich } \text{K}\alpha < \text{KI}$$

mithin liegt der Punkt X auf der Linie EI.

Auch ist $\text{EH} : \text{GX} = \text{OK} : \text{GS}$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

$$\text{also } \text{FL} : \text{GX} = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1. bestimmt
in (Fig. 56.) der Punkt α , für welchen $\text{E}\alpha = \sqrt{\text{GE} \cdot \text{EK}}$,
ein größeres Verhältniss, als jeder andere Punkt der
Linie EI, und jeder demselben näher liegende ein
größeres, als der entferntere, welches bewiesen
wird, wie lib. II. loc. III. Fall 4. α . Zus. 1.

Zus. 2.

Errichtet man (Fig. 57.) in dem zweiten Durch-
schnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Per-

pendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie EC in einem Punkte X' zwischen E, I, oder in I, oder zwischen I, C,

$$\text{je nachdem } KI \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} K\alpha + \alpha X' \\ \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS} \end{array} \right.$$

$$\text{also } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$$

$$\text{folglich } KI^2 \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(KG + GS) \\ IK.KG + IE.GS \end{array} \right\} - EK.GS$$

$$\text{mithin } KI(1K - KG) \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \frac{IE.GS}{KI.IG}$$

$$\text{somit } \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : \{ NG \} \\ \quad \{ FI \} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{demnach } VN : NM \left\{ \begin{array}{l} > \\ = \\ < \end{array} \right\} FI : IG$$

Auch ist $EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GC. (Fig. 53. 58—60.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

a.) Es sey $EI = \sqrt{GE \cdot EK}$ (Fig. 53. 58.)

Determination.

Es muß seyn $GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Det.)

also $VN : \left\{ \begin{matrix} GS \\ MN \end{matrix} \right\} \geq \left\{ \begin{matrix} VN \\ OK + FI \end{matrix} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$
 $p : q$

Beweis.

Es ist $p : q \geq \left\{ \begin{matrix} OK + FI \\ VN \end{matrix} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$
 $VN : \left\{ \begin{matrix} NM \\ GS \end{matrix} \right\}$

folglich $GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$

mithin berührt (Fig. 53.), oder schneidet (Fig. 58.) der Kreis die Linie TU.

Ueberdies da $GS \geq GE + EK + 2EI$

ist $KS \geq \left\{ \begin{matrix} 2(KE + EI) \\ 2KI \end{matrix} \right\}$

folglich $K\alpha \geq KI$, wenn $K\alpha = \alpha S$

folglich liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4. bestimmt in Fig. 53. der Punkt α , für welchen $E\alpha = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein größeres Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie IS, und jeder dem Punkte I näher liegende derselben ein größeres, als der entferntere, welches bewiesen wird, wie lib. II. loc. IV. Fall 4. α . Zus. 1.

Zus. 2.

Der durch den anderen Durchschnitt R' in Fig. 58. bestimmte Punkt X' fällt zwischen E, I, oder in I, also zwischen I, C,

je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KX'$

das heisst, da $KX \cdot XS = EK \cdot GS$
 $\left. \begin{matrix} K\alpha^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{matrix} \right\} - \alpha X^2$

also $\alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$

je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{2}KS - \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS}$

mithin $\frac{1}{4}KS^2 - EK \cdot GS \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{1}{4}KS^2 - IK \cdot KS + KI^2$

somit $\left. \begin{matrix} IK \cdot KS \\ IK(KG + GS) \end{matrix} \right\} - EK \cdot GS \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KI^2$
 $\left. \begin{matrix} (IK - KE)GS \\ IE \cdot GS \end{matrix} \right\} + IK \cdot KG$

$$\text{demnach } IE.GS \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} KI(IK-KG) \\ KLIG \end{matrix} \right.$$

$$\text{also } \begin{matrix} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : \left\{ \begin{matrix} NG \\ FI \end{matrix} \right\} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} SG \\ MN \end{matrix} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } VN : NM \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} FI : IG$$

$$p : q$$

Auch ist, wenn die, die Linien EH, IA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie zu lib. II. loc. I. Fall 4. Bew.)}$$

β.) Es sey $EI < \sqrt{GE.EK}$. (Fig. 59. a. 58.)

Determination.

Buchstäblich, wie zu α.

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} OK + FI \\ VN \end{matrix} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK} \text{ (Det.)}$$

$$VN : \left\{ \begin{matrix} NM \\ GS \end{matrix} \right\}$$

$$\text{folglich } GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$$

mithin berührt (Fig. 59. a.), oder schneidet (Fig. 58.) der Kreis die Linie TU.

$$\text{Da } GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ (Det.), } EI < \sqrt{GE \cdot EK} \text{ (hyp.)}$$

$$\text{so ist } GS > GE + EK + 2EI$$

$$\text{also } KS > 2(KI + EI)$$

$$\text{folglich } K\alpha > KI \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

mithin liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

In Beziehung auf Fig. 59. a. buchst., wie α . Zus. 1.

Zus. 2.

In Beziehung auf Fig. 58. buchst., wie α . Zus. 2.

$$\gamma.) \text{ Es sey } EI > \sqrt{GE \cdot EK}. \text{ (Fig. 58. 60.)}$$

$$\kappa.) \text{ Es sey } p : q < OK + FI : GI + IK. \text{ (Fig. 58.)}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q < OK + FI : GI + IK$$

$$\text{Da } EI > \sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} GE + EK + 2EI \\ GI + IK \end{array} \right\} > \left. \begin{array}{l} GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \\ GI + IK \end{array} \right\}$$

$$\text{also } OK + FI : GI + IK < OK + FI : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} \{OK + FI\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \\ VN \end{array} \right\}$$

$$\text{mithin } GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

demnach schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $VN : NM \left\{ \begin{array}{l} < OK + FI : GI + IK \\ OK + FI : GS \end{array} \right\}$

also $GS > GI + IK$

folglich $KS > 2KI$

mithin $K\alpha > KI$

wenn $K\alpha = \alpha S$

demnach liegt der Punkt X auf IC.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Macht man $E\varepsilon = \sqrt{GE \cdot EK}$, so bestimmt (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.) der Punkt ε ein größeres Verhältniß, als jeder Punkt der Linie IS, und jeder dem Punkte ε näher liegende Punkt derselben ein größeres, als der entferntere, welches bewiesen wird, wie lib. II. loc. III. Fall 4. β . Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie α . Zus. 2.

2.) Es sey $p : q = OK + FI : GI + IK$. (Fig. 59. b.)

Beweis.

Es ist $p : q = OK + FI : GI + IK$

Da $EI > \sqrt{GE \cdot EK}$

so ist $GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$ (wie N. Bew.)

also schneidet der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $VN : NM \left\{ \begin{array}{l} = OK + FI : GI + IK \\ OK + FI : GS \end{array} \right\}$

also $GS = GI + IK$

folglich $KS = 2KI$

mithin $K\alpha = KI$

wenn $K\alpha = \alpha S$

demnach liegt der Punkt X auf IS.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I, loc. VI. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II, loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Buchst., wie N. Zus. 1.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so ist, wenn die, die Linien EH, FI in H', L' schneidende gerade Linie OL' gezogen wird,

$EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I, loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II, loc. I. Fall 1. Bew.), welches Fall 4. ist.

1.) Es sey $p : q > OK + FI : GI + IK$. (Fig. 60.)

Determination.

Da $p : q > OK + FI : GI + IK$

$VN : NM$

$OK + FI : GS$

also $GS < GI + IK$

folglich $KS < 2KI$

mithin $K\alpha < KI$

wenn $K\alpha = \alpha S$

so mufs $KI < K\alpha + \alpha X$ seyn.

$$\text{Nun ist } \left. \begin{array}{l} KX.XS \\ K\alpha^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} = EK.GS - \alpha X^2$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{folglich mu\u00df seyn } KI = \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

$$\text{also } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 = \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$$

$$\text{folglich } KI^2 = \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(KG + GS) \\ (IK - KE)GS \\ IE.GS \end{array} \right\} - EK.GS + IK.KG$$

$$\text{mithin } \left. \begin{array}{l} KI(IK - KG) \\ KI.IG \end{array} \right\} = IE.GS$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NG \\ FI \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : IG$$

$$\text{demnach } \left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} = FI : IG$$

Beweis.

$$\text{Es ist } EI > \sqrt{GE.EK}$$

$$\text{also } GE.EK + EI^2 > 2EI\sqrt{GE.EK}$$

$$\text{folglich } GE.EK > EI(2\sqrt{GE.EK} - EI)$$

$$\text{mithin } IE : EK < GE : 2\sqrt{GE.EK} - EI$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} IE : EK \\ FI : OK \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} GE + EI \\ IG \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG$$

$$\text{demnach } FI : IG < OK : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} - IG$$

$$\text{also } FI : IG < OK + FI : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{somit } GS > GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin schneidet der Kreis die Linie TU.

$$\text{Ferner ist } p : q = FI : IG$$

$$\text{also } KI < KX, \text{ wie leicht aus der}$$

Analysis erhellet.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Bew.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Buchst., wie N. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie 2. Zus. 2.

b.) auf der Linie IE. (Fig. 61 — 65.).
(Loc. V.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA,
GC. (Fig. 61.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Da (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) die durch beide Durchschnittspunkte des Kreises und der Linie TU bestimmten Punkte X, X' auf verschiedenen Seiten des Punktes E liegen, so muß, damit X auf IC falle,

$KI = K\alpha + \alpha X$ seyn, wenn $K\alpha = \alpha S$.

Es ist aber $KX.XS = EK.GS$

$$\left. \begin{array}{l} K\alpha^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} - \alpha X^2$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

folglich muß seyn $KI = \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$

$$\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 = \frac{1}{4}KS^2 - EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 = \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(KG + GS) \\ (IK - KE)GS \\ IE.GS \end{array} \right\} - EK.GS + IK.KG$$

$$\text{demnach } \left\{ \begin{array}{l} KI(IK - KG) \\ KI.IG \end{array} \right\} = IE.GS$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NG \\ FI \end{array} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} \text{VN : NM} \\ p : q \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \text{FI : IG}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \text{FI : IG (Det.)}$$

also $KI \begin{array}{l} = \\ < \end{array} KX$, wie aus der Determination leicht erhellet.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 1. Bew.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, IA, IS in W, Z, Y schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY \begin{array}{l} > \\ < \end{array} VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 1.)}$$

$$\text{also ist } FZ : GY \begin{array}{l} > \\ < \end{array} p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IS grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) die Linie EK in dem Punkte X' so, dafs, wenn die, die Linien EH, FB in H', L' schneidende gerade Linie OL' gezogen wird,

$$EH' : GX' = OK : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, IG. (Fig. 62.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Da (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) die durch beide Durchschnittspunkte des Kreises und der geraden Linie TU bestimmten Punkte X, X' auf verschiedenen Seiten des Punktes E liegen, so muß, damit X auf GI falle, seyn $KI \geq K\alpha + \alpha X$, wenn $K\alpha = \alpha S$.

Es ist aber $KX.XS = EK.GS$

$$\left. \begin{array}{l} K\alpha^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} - \alpha X^2$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$$

folglich muß seyn $KI \geq K\alpha + \alpha X$

also $p : q \geq FI : IG$ (wie zu Fall 1.)

Beweis.

Es ist $p : q \geq FI : IG$ (Det.)

also $KI \geq KX$, wie leicht aus der Determination erhellet.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 1. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, GI, IF in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$\frac{EW : GY}{VG : GS}$$

also ist $FZ : GY \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EI kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 1. Zus. 2.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GK . (Fig. 63.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 2. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, EG, FI in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$\frac{EW : GY > VG : GS}{<}$$

also ist $FZ : GY \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)
 folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden
 Punkte der Linie GE größere Verhältnisse, als die
 entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R'
 der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf
 TU, so schneidet dasselbe die verlängerte IK in
 einem Punkte X' so, daß, wenn die, die Linien EH,
 IA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen
 wird, $EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 2. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Es ist mithin eine Linie OX' gefunden, welche
 von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebene-
 nen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 5. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB,
 GD. (Fig. 64.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die
 Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 3.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EK, EH, FB in Y, W, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$EW : GY \leq VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 3. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } FZ : GY \leq p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie GS in einem Punkte X' so, daß, wenn die, die Linien EH, FA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 3. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Es ist mithin eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, und der Punkt X' liegt auf

IC, oder in I, oder auf IG, je nachdem $p : q \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} FI : IG,$

welches aus Fall 1. 2. erhellet.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 65.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. II. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien KD, EH, IA in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \geq VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 1.)

also auch $FZ : GY \geq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KD kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU , so schneidet dasselbe die Linie GE in einem Punkte X' so, daß, wenn die, die Linien EH, FI in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $EH' : GX' = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

folglich ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FI, GK Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

c.) in dem Punkte E . (Fig. 66 — 69.).
(Loc. VI.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GC. (Fig. 66)

Analysis.

Es sey LX die gesuchte Linie. Zieht man EH $\parallel$ AB, welche der geraden Linie OX in H begegne, so ist FL : EH = FO : OE, also ist das Verhältniß FL : EH gegeben. Da auch das Verhältniß FL : GX gegeben ist, so ist das Verhältniß EH : GX gegeben, folglich die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Man ziehe OF, OK $\parallel$ AB $\parallel$ VGN, OV $\parallel$ CD $\parallel$ FN, mache NP = p, NQ = q, ziehe VM $\parallel$ PQ, MS $\parallel$ AB, OX $\parallel$ VS, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Determination.

Da $KX \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} KI$ werden soll, so muß seyn $\left. \begin{matrix} OK : KX \\ HG : GX \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} OK : KI$

$$\begin{aligned} \text{Da aber } FL : GH &= FO : OE \\ &= NV : \begin{cases} VG \\ OK \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{so muß seyn } \left. \begin{matrix} FL : GX \\ p : q \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left. \begin{matrix} NV : KI \\ OK + FI : IK \end{matrix} \right\}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{matrix} p : q \\ VN : NM \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left. \begin{matrix} OK + FI \\ VN \end{matrix} \right\} : IK \quad (\text{Det.})$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} MN \\ GS \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} KI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} VG : GS \\ HG : GX \\ OK : KX \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \\ < \end{array} OK : KI$$

$$\text{mithin } KX \begin{array}{l} = \\ > \end{array} KI$$

$$\begin{array}{l} \text{Ferner ist } HG : GX = OK : GS \\ FL : GH = FO : OG \\ = NV : VG \end{array}$$

$$\text{also } FL : GX = NV : \left. \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\} = p : q$$

Zus.

Für eine andere, die Linien EH, IA, IS in W, Z, Y schneidende gerade Linie ist

$$WG : GY \begin{array}{l} \geq \\ < \end{array} VG : GS \text{ (lib. I. loc. III. Fall 1. Zus.)}$$

$$\text{also } FZ : GY \begin{array}{l} \geq \\ < \end{array} p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IS grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, IG. (Fig. 67.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit $KX \stackrel{=}{<} KI$ werde, muß seyn

$$\begin{array}{l} OK : KX \\ HG : GX \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} OK : KI$$

$$\begin{array}{l} \text{Da } FL : GH = FO : OE \\ \phantom{\text{Da }} = NV : \left\{ \begin{array}{l} VG \\ OK \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{so muß } FL : GX \\ \phantom{\text{so muß }} p : q \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{array}{l} NV : KI \\ OK + FI : IK \end{array} \text{ seyn}$$

Damit $KX > KE$ werde, muß seyn

$$VG : GS < OK : KE \text{ (lib. I. loc. III, Fall 1. Det.)}$$

$$\text{also } GS > KE$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \\ \phantom{\text{folglich }} p : q \end{array} \left\} < OK + FI : KE$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ \phantom{\text{Es ist }} VN : NM \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{array}{l} OK + FI \\ VN \end{array} : IK$$

$$\text{also } \begin{array}{l} MN \\ GS \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} KI$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } VG : GS \\ \phantom{\text{folglich }} HG : GX \\ \phantom{\text{folglich }} OK : KX \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} OK : KI$$

$$\text{mithin } KX \stackrel{=}{<} KI$$

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : NM \end{array} \right\} < \left. \begin{array}{l} \{OK + FI\} : KE \\ VN \end{array} \right\}$$

$$\text{also } MN > KE$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} OK \\ VG \end{array} \right\} : \left. \begin{array}{l} \{MN\} \\ \{GS\} \end{array} \right\} < OK : KE$$

$$\text{mithin } KX > KE$$

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 1. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus.

Für eine andere, die Linien EH, EI, IF in W, Y, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$WG : GY \geq VG : GS \text{ (lib. I. loc. III. Fall 1. Zus.)}$$

$$\text{also } FZ : GY \geq p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EI kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GK. (Fig. 68.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III, Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X zwischen K, G liege, muß seyn
 $OK : GS > OK : KG$ (lib. I. loc. III. Fall 2. Det.)

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\} < KG$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} > OK + FI : KG$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \left. \right\} > OK + FI : KG$$

$$\text{folglich } GS < KG$$

$$\text{mithin } VG : GS > OK : KG$$

$$\text{somit } KX < KG \text{ (lib. I. loc. III. Fall 2. Bew.)}$$

$$\text{Auch ist } EH : GX = VG : GS \text{ (lib. I. loc. III. Fall 2.)}$$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. II. Fall 1. Bew.)}$$

Zus.

Für eine andere, die Linien KE, EH, FB in Y, W, Z schneidende gerade Linie OZ ist

$$WG : GY \leq VG : GS \text{ (lib. I. loc. III. Fall 2. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } FZ : GY \leq p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KE kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 69.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 3. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus.

Für eine andere, die Linien KD, EH, IA in Y, W, Z schneidende gerade Linie ist

$EW : GY \gtrless VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 3. Zus.)

also $FZ : GY \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus.)

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

II. auf IA (siehe pag. 58.). (Fig. 70 — 104.).
Zieht man durch O die gerade Linie $Oa \parallel CD$, und bezeichnet man mit a den Durchschnitt derselben mit der Linie IA , so liege F

1.) in a . (Fig. 70 — 79.). Der Punkt G liege

A.) auf der Linie IC . Dieser Fall ist erlediget durch lib. II. loc. II.

B.) auf der Linie ID . (Fig. 70 — 79.)
Bezeichnet man mit K den Durchschnitt

der Linie CD mit einer durch O mit AB gezogenen Parallellinie OK, so liege der Punkt G

α.) in K. (Fig. 70 — 72.) (Loc. VII.).

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, KD. (Fig. 70.)

Analysis.

Es sey LX die gesuchte Linie, so ist

$$\left. \begin{array}{l} FL : GX \\ FL.GX \end{array} \right\} = p : q \quad \left. \begin{array}{l} : GX^2 \\ FO.OK \end{array} \right\}$$

(El. VI. 4. 16.)

folglich GX, somit X, und OX der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $HK = KO$, $IKT = R$, $KP = p$, $KQ = q$, beschreibe über IH, PQ als Durchmessern Kreise, welche die Linie KT in T, R schneiden, ziehe $TX \parallel RQ$, und verbinde die Punkte O, X durch die gerade Linie OX, welche in L der Linie FA begegne, so ist LX die gesuchte Linie.

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } FL : GX &= \left(\begin{array}{l} FL.GX \\ FO.OK \\ IG.GH \\ TG^2 \end{array} \right) : GX^2 \\ &= RG^2 : GQ^2 \\ &= PG : GQ \end{aligned}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GD , FA in Y , Z schneidende gerade Linie OY ist

$$FZ \gtrless FL, \quad GY \lesseqgtr GX$$

$$\text{also } FZ : GY \gtrless FL : GX$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie GD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt T' des über IH beschriebenen Kreises mit TK eine, die Linie CD in X' schneidende, mit RQ parallele Linie, so liegt X' zwischen G , I , oder in I , oder zwischen I , C , je nachdem $KX' \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KI$

$$\text{also } T'K : KX' \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} T'K : KI$$

$$\text{folglich } T'K^2 : KX'^2 \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} T'K^2 \\ IK \cdot KO \\ FI : IK \end{cases} : KI^2$$

und es ist, wenn die, die Linie AB in L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $FL' : GX' = \begin{cases} FL' \cdot GX' \\ FO \cdot OK \\ T'G^2 \end{cases} : GX'^2$

$$= RG^2 : GQ^2$$

$$= p : q$$

Es ist also eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FI , GC , oder FB , GC Segmente in

dem gegebenen Verhältniſſe abſchneidet, welches Fall 2., oder Fall 3. iſt.

F a l l 2.

Die Segmente ſollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 71.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Da $KI \stackrel{=}{>} KX$ werden ſoll, ſo muß ſeyn

$$TK : KI \stackrel{=}{<} TK : KX$$

$$\begin{array}{l} \text{also } TK^2 \} : KI^2 \} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} TK^2 : KX^2 \\ RK^2 : KQ^2 \\ p : q \end{array} \right. \\ IK.KO \} \\ OK : KI \\ FI : IK \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es iſt } FI : IK \} \stackrel{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} p : q \text{ (Det.)} \\ RK^2 : KQ^2 \\ TK^2 : KX^2 \end{array} \right. \\ OK : KI \\ IK.KO \} : KI^2 \\ TK^2 \} \end{array}$$

$$\text{also } KI \stackrel{=}{>} KX$$

$$\text{Auch iſt } FL : GX = FL.GX : GX^2$$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GC, FB in Y, Z ſchneidende gerade Linie OZ iſt

$$FZ \geq FL, \quad GY \leq GX$$

$$\text{also } FZ : GY \geq FL : GX$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der geraden Linie IK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt T' des über HI beschriebenen Kreises mit TK eine, die Linie CD in X' schneidende, mit RQ parallele Linie, so ist, wenn die, die Linie AB in L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $FL' : GX' = p : q$ (wie Fall 1. Zus. 2.). Es ist also eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC. (Fig. 72.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Da $KX \geq KI$ werden soll, so muß seyn

$$TK : KI \geq TK : KX$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} TK^2 \\ IK.KO \\ FL.IK \\ FI : IK \end{array} \right\} : KI^2 \geq \left\{ \begin{array}{l} TK^2 : KX^2 \\ RK^2 : KQ^2 \\ p : q \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } FI : IK \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p : q \text{ (Det.)} \\ RK^2 : KQ^2 \\ TK^2 : KX^2 \end{array} \right. \\ FI.IK \left\{ : KI^2 \right. \\ IK.KO \left\{ \\ TK^2 \right\} \end{array}$$

$$\text{also } KI \begin{array}{l} = \\ < \end{array} KX$$

$$\text{Auch ist } FL : GX = FL.GX : GX^2$$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie zu Fall 1.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien IC, IF in Y, Z schneidende gerade Linie OY ist

$$FZ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} FL, \quad GY \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} GX$$

$$\text{also } FZ : GY \begin{array}{l} \leq \\ \geq \end{array} FL : GX$$

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 2. Zus. 2.

b.) auf der Verlängerung der Linie IK. (Fig. 73 — 75.) (Loc. VIII.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 73.)

Analysis.

Es sey LX die gesuchte Linie, so ist $FL:GX = p:q$
 $FL.KX : GX.XK$
 $FO.OK$

also ist GX.XK gegeben. Da auch $KX-XG=GK$ gegeben ist, so ist (Dat. 85) GX, somit der Punkt X, und die gerade Linie OX der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $OK \parallel AB$, $IKH = R$, $HK = KO$, $EK = KI$, $KP = p$, $KQ = q$, beschreibe über HE, PQ Halbkreise, welche der Linie ID in N, V begegnen, ziehe PN, mache $KVR = KPN$, $KT = TG$, und beschreibe aus T als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= TR$, welcher die KD in X schneide, so ist die gerade Linie OX die gesuchte.

Beweis.

Es ist $NK:KR = PK:KV$

$$\begin{array}{l} \text{also } NK^2:KR^2 = PK^2:KV^2 \\ \left. \begin{array}{l} EK.KH \\ IK.KO \\ FO.OK \\ FL.KX \end{array} \right\} : KX.XG = PK:KQ \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ FL:GX \end{array} \right\} = p:q \end{array}$$

Zus. 1.

Buchst., wie lib. II. loc. VII. Fall 1. Zus. 1.

Zus. 2.

Bezeichnet man mit X' den zweiten Durchschnitt des mit einem Radius $= TR$ beschriebenen Kreises mit der Linie CT, so fällt X' zwischen I, C, oder in I, oder zwischen I, K,

je nachdem $IK \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KX' , IG \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} GX'$

also $KI.IG \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KX'.X'G$

folglich $FI.IK : KI.IG \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} FI.IK \\ EK.KH \\ NK^2 \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} KX'.X'G \\ KR^2 \\ PK^2 : KV^2 \\ p : q \end{array} \right\}$

Auch ist $NK^2 \left\{ \begin{array}{l} FO.OK \\ FL'.KX' \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} KR^2 \\ KX'.X'G \end{array} \right\} = p : q$
 $FL' : KX'$

Es ist also eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB , GC , oder FI , GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3., oder Fall 4. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA , GK . (Fig. 74)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 1., wenn $KX + XG$ statt $KX - XG$, und Dat. 86. statt Dat. 85. gesetzt wird.

Construction.

Man bestimme KR , wie in Fall 1., ziehe $RM \nparallel CD$, welche einem über KG beschriebenen Halbkreise in M begegne, fälle von M ein Perpendikel

MX auf CD, und ziehe OX, welche der Linie IA in L begegne, so sind FL, GX die gesuchten Segmente.

Determination.

Damit RM den über KG beschriebenen Halbkreis erreiche, muß seyn $KR = \frac{1}{2}KG$.

Nun ist $NK : KR = PK : KV$

$$\begin{array}{l} \text{also } NK^2 \\ HK \cdot KE \\ FO \cdot OK \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} NK^2 \\ HK \cdot KE \\ FO \cdot OK \end{array}} \right\} : KR^2 = PK^2 : KV^2 = p : q$$

folglich muß seyn $p : q = FO \cdot OK : \frac{1}{4}KG^2$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ PK^2 : KV^2 \\ NK^2 : KR^2 \\ FO \cdot OK \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} p : q \\ PK^2 : KV^2 \\ NK^2 : KR^2 \\ FO \cdot OK \end{array}} \right\} = FO \cdot OK : \frac{1}{4}KG^2 \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } KR^2 = \frac{1}{4}KG^2$$

$$\text{folglich } KR = \frac{1}{2}KG$$

mithin berührt (Fig. 74. a.), oder schneidet (Fig. 74. b.) der Kreis die Linie RM.

Nun ist $NK : KR = PK : KV$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie zu Fall 1.)}$$

Zus. 1.

Für eine, in Fig. 74. a. die Linien KG, FA in Y, Z schneidende gerade Linie OX ist

$$KY.YG < KX.XG \quad (\text{El. II. 5.})$$

$$\begin{array}{l} \text{also } NK^2 \\ FO.OK \\ FZ.KY \\ FZ:GY \end{array} : KY.YG \Bigg\} > \left\{ \begin{array}{l} NK^2 : \\ KX.XG \\ KR^2 \\ p:q \end{array} \right.$$

folglich bestimmt der Halbirungspunkt von KG ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt dieser Linie.

Auch ist für eine, die Linien KG , FA in γ , δ schneidende gerade Linie $O\delta$, wenn $\gamma X > XY$,

$$K\gamma.\gamma G < KY.YG \quad (\text{El. II. 5.})$$

$$\begin{array}{l} \text{also } NK^2 \\ FO.OK \\ F\delta.K\gamma \\ F\delta:G\gamma \end{array} : K\gamma.\gamma G \Bigg\} > \left\{ \begin{array}{l} NK^2 \\ FO.OK \\ FZ.KY \\ FZ:GY \end{array} \right\} : KY.YG$$

mithin bestimmt jeder dem Halbirungspunkte von KG näher liegende Punkt dieser Linie ein kleineres Verhältniß, als der entferntere.

Zus. 2.

Fällt man in Fig. 74. b. von dem zweiten Durchschnitte M' ein Perpendikel $M'X'$ auf CD , so ist auch, wenn die Linie OX' die Linie FA in L' schneidet, $FL':GX'=p:q$, wie vorhin.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI , GX . (Fig. 75. a.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit X auf IC falle, muss werden

$$\frac{IK}{IG} = \frac{KX}{GX}$$

$$\text{also } KI \cdot IG = KX \cdot XG$$

$$\text{folglich } \frac{FI \cdot IK : KI \cdot IG}{FI : IG} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{FO \cdot OK}{FL \cdot KX} : KX \cdot XG \\ FL : GX \\ p : q \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q = \left\{ \begin{array}{l} FI : IG \\ PK : KQ \\ PK^2 : KV^2 \\ NK^2 : KR^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FI \cdot IK : KI \cdot IG \\ NK^2 \end{array} \right.$$

$$\text{also } \frac{KR^2}{TR^2 - TK^2} = \frac{KI \cdot IG}{TI^2 - TK^2}$$

$$\text{folglich } TX^2 = TI^2$$

$$\text{mithin } TX = TI$$

Ferner ist $NK : KR = PK : KV$

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie zu Fall 1.)}$$

Zus. 1.

Buchst., wie lib. II. loc. VII. Fall 3. Zus. 1.

Zus. 2.

Zieht man durch den zweiten Durchschnitt X' der Linie KT und des aus T als Mittelpunkt mit TR als

Radius beschriebenen Kreises die gerade Linie OX' , welche IH in L' schneide, so ist $FL' : GX' = p : q$, wie aus Fall 1. Bew. erhellet. Es ist also eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA , GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB , GI . (Fig. 75. b.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit X auf KI liege, muß seyn

$$KX = KI, \quad GX = GI$$

$$\text{also } KI \cdot IG = KX \cdot XG$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} FI \cdot IK : KI \cdot IG \\ FI : IG \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \{ FO \cdot OK \} : KX \cdot XG \\ \{ FL \cdot KX \} \\ FL : GX \\ p : q \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} FI : IG \\ PK : KQ \\ PK^2 : KV^2 \\ NK^2 : KR^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FI : IG \\ \{ FI \cdot IK \} : KI \cdot IG \\ \{ NK^2 \} \end{array} \right.$$

$$\frac{\text{also } \left. \begin{matrix} KR^2 \\ TR^2 - TK^2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} KI \cdot IG \\ TI^2 - TK^2 \end{matrix} \right.}{}$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} TR \\ TX \end{matrix} \right\} \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} TI$$

Ferner ist $NK : KR = PK : KV$

also $FL : GX = p : q$ (wie zu Fall 1.)

Zus. 1.

Buchst., wie lib. II. loc. VII. Fall 3. Zus. 1.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 3. Zus. 2.

c.) auf der Linie KI. (Fig. 76 — 79.)
(Loc. IX.).

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA,
GD. (Fig. 76.)

Analysis.

Wie zu loc. VIII. Fall 1., wenn nur $GK - XK$
statt $KX - XG$ gesetzt wird.

Construction und Beweis.

Buchst., wie zu loc. VIII. Fall 1.

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie loc. VIII. Fall 1. Zuss. 1. 2.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB,
GK. (Fig. 77. a. b.)

Analysis. Construction. Determination.

Beweis. Zuss.

Buchst., wie zu loc. VIII. Fall 2.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI,
GC. (Fig. 78.)

Analysis. Construction. Determination.

Beweis. Zuss. 1. 2.

Buchst., wie zu loc. VIII. Fall 3.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB,
GI. (Fig. 79.)

Analysis. Construction. Determination.

Beweis. Zuss. 1. 2.

Buchst., wie zu loc. VIII. Fall 4.

2.) auf der Verlängerung von Ia.
(Fig. 80 — 98.) Der Punkt G liege

A.) auf der Linie IC.

Ist erlediget durch lib. II. loc. III.

B.) auf der Linie ID, namentlich,
wenn OK#AB gezogen wird,

a.) in K. Ist erlediget durch lib. II. loc. VIII.

b.) auf der Linie KD. Bezeichnet man mit E den Durchschnitt der Linie CD mit der geraden Linie OF, so liege der Punkt G

a.) in E. (Fig. 80—84.) (Loc. XI.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FZ, GD. (Fig. 80.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. VI. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. III. Fall 1. Det. muß seyn

$$VG : GS < OK : KE$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\} > KE$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} VN : KE \\ FI - OK : KE \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left\{ \begin{array}{l} p : q \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} FI - OK \\ VN \end{array} \right\} : KE$$

$$\text{also } GS > KE$$

folglich $VG : GS \left\{ \begin{array}{l} < OK : KE \\ OK : KX \end{array} \right\}$

mithin $KX > KE$

Auch ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Z u s.

Für eine andere, die Linien ES, EH, FI in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \leq VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 1. Zus.)

also $FZ : GY \leq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie ES grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

F a l l 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GI. (Fig. 81.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. III. Fall 2. Det. muß seyn

$VG : GS > OK : KE$

also $\left\{ \begin{array}{l} GS \\ MN \end{array} \right\} < KE$

folglich $VN : NM \left\{ \begin{array}{l} > \\ p : q \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} VN : KE \\ FI-OK : KE \end{array} \right.$

Beweis.

Es ist $p : q \left\{ \begin{array}{l} > \\ VN : \left\{ \begin{array}{l} NM \\ GS \end{array} \right\} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} FI-OK \\ VN \end{array} \right\} : KE$

also $GS < KE$

folglich $VG : GS \left\{ \begin{array}{l} > \\ OK : KX \end{array} \right\} OK : KE$

mithin $KX < KE$

Auch ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 2.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Z u s.

Für eine andere, die Linien EH, EK, FL in W, Y, Z schneidende gerade Linie O'Z ist

$EW : GY \leq VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 2. Zus.)

also $FZ : GY \leq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

folglich bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EK grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 82.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. III. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit $KX \overset{=}{<} KI$ werde, muß seyn

$$\begin{array}{l} OK : KX \\ HG : GX \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} OK : KI$$

$$\begin{array}{l} \text{Da nun } FL : GH = FO : OE \\ \qquad \qquad \qquad = NV : VG \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{so muß seyn } FL : GH \\ p : q \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{array}{l} NV : KI \\ FI - OK : KI \end{array}$$

Beweis.

$$\begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ VN : NM \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \begin{array}{l} FI - OK \\ NV \end{array} : KI \text{ (Det.)}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } MN \\ GS \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} KI$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } VG : GS \\ HG : GX \\ OK : KX \end{array} \left\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} OK : KI$$

$$\text{mithin } KX \overset{=}{<} KI$$

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 3. Bew.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus.

Für eine andere, die Linien BI, IK, EH in Z, Y, W schneidende gerade Linie OZ ist

$$\underline{EW : GY \lesseqgtr VG : GS \text{ (lib. I. loc. III. Fall 3. Zus.)}}$$

$$\text{also } FZ : GY \lesseqgtr p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)}$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren,

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC.
(Fig. 83.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 3.

Determination.

Damit $KX \lesseqgtr KI$ werde, muß seyn

$$\left. \begin{array}{l} OK : KX \\ HG : GX \end{array} \right\} \lesseqgtr OK : KI$$

$$\begin{array}{l} \text{Da nun } FL : GH = FO : OE \\ \quad \quad \quad = NV : VG \end{array}$$

$$\text{so muß seyn } \left. \begin{array}{l} FL : GX \\ p : q \end{array} \right\} \lesseqgtr \left. \begin{array}{l} NV \\ FI - OK \end{array} \right\} : KI$$

Beweis.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } p : q \\ VN : NM \end{array} \right\} \lesseqgtr \left. \begin{array}{l} FI - OK \\ NV \end{array} \right\} : KI \text{ (Det.)}$$

$$\underline{\text{also } \left. \begin{array}{l} MN \\ GS \end{array} \right\} \lesseqgtr KI}$$

folglich $\left. \begin{array}{l} VG : GS \\ HG : GX \\ OK : KX \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \\ < \end{array} \frac{OK : KI}{\text{also } FZ : GY \leq p : q}$

mithin $KX \geq KI$

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ } (wie zu Fall 3.)
also $FL : GX = p : q$

Zus.

Für eine andere, die Linien CI, IF, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \leq VG : GS$ (lib. I. loc. III. Fall 3. Zus.)

also $FZ : GY \leq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IC grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

β.) zwischen K, E. (Fig. 84 — 90.)
(Loc. XII.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 84.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf KI falle, muß $KI \geq KX$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

$$X\alpha^2 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha K^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$\text{folglich muß seyn } KI \geq \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \geq \frac{1}{4}KS^2 + EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 \geq \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(SG - GK) \\ (IK + KE)GS \\ IE.GS \end{array} \right\} + EK.GS - IK.KG$$

$$\text{demnach } KI(IK + KG) \geq IE.GS$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right\}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \geq FI : IG \text{ (Det.)}$$

also $KI \geq KX$, wie aus der Determination leicht hervorgehet.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien BI, IK, EH in Z, Y, W schneidende gerade Linie OZ ist

$EW : GY \leq VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 1.)

also $FZ : GY \leq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte K näher liegenden Punkte der Linie IK grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linien EG, FA, EH (verm. lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 2.) in X' so, daß

$EH' : GX' = VG : GS$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.) mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GE Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC. (Fig. 85.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf IC falle, muß $KI \leq KX$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS} \text{ (wie Fall 1. Det.)}$$

folglich muſs seyn $KI \leq \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$

$$\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \leq \frac{1}{4}KS^2 + EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 \leq \begin{cases} IK.KS + EK.GS \\ IK.GS - IK.KG + EK.GS \\ IE.GS - IK.KG \end{cases}$$

$$\text{demnach } KI.IG \leq IE.GS$$

$$\text{also } \left. \begin{matrix} KI : IE \\ VN : NG \end{matrix} \right\} \leq SG : GI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{matrix} VN : NM \\ p : q \end{matrix} \right\} \leq FI : IG$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \leq FI : IG$$

also $KI \leq KX$, wie aus der Determination leicht hervorgehet.

$$\text{Auch ist } \left. \begin{matrix} EH : GX = OK : GS \\ \text{also } FL : GX = p : q \end{matrix} \right\} \text{ (wie zu Fall 1.)}$$

Zuss. 1. 2.

Buchst., wie Fall 1. Zuss. 1. 2.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FL, GK. (Fig. 86. 87.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 2. Det. muß seyn

$$GS = KE + EG - 2\sqrt{KE \cdot EG}$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} VN : GS \\ p : q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} VN \\ FI - OK \end{array} \right\} : KE + EG - 2\sqrt{KE \cdot EG}$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} p : q \\ VN : GS \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} FI - OK \\ VN \end{array} \right\} : KE + EG - 2\sqrt{KE \cdot EG}$$

$$\text{also } GS = KE + EG - 2\sqrt{KE \cdot EG}$$

mithin berührt (Fig. 86.), oder schneidet (Fig. 87.) der Kreis die Linie TU.

Auch ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 2.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 86. die Linien GK, EH, FA in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY > VG : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 1.)}$$

also $FZ : GY > p : q$ (wie lib. II. loc. IV. Fall 2. Zus. 1.)
mithin bestimmt der Halbirungspunkt X von KS, für welchen $EX = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein kleineres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie KS.

Auch ist für eine, die Linien GK, EH, FA in γ, β, δ schneidende gerade Linie O β , wenn $\gamma X > XY$, (vermöge desselben 'Zusatzes)

$$E\beta : G\gamma > EW : GY$$

also $F\delta : G\gamma > FZ : GY$ (wie lib.II. loc.IV. Fall 2. Zus. 1.) mithin bestimmen die dem Halbirungspunkte von KS näher liegenden Punkte kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 87. in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie KG (verm. lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 2.) so, dafs, wenn die, die Linien EH, FA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = VG : GS$$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib.II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.) mithin ist eine zweite Linie OX' gefunden, welche von den gegebenen Linien Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet,

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 85.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib.II. loc. I. Fall 1., wenn man H', X', L' statt H, X, L setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib.II. loc. I. Fall 1., wenn man H', X', R', L' statt H, X, R, L setzt.

Beweis.

Es ist $EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, EG, FA in W', Y', Z' schneidende gerade Linie OY' ist

$EW' : GY' \geq VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 1.)

also $FZ' : GY' \geq p : q$ (wie lib. II. loc. IV. Fall 3. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie EG grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie KC zwischen I, C, oder in I, oder zwischen K, I,

je nachdem $KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KX$,

oder, da $KX.XS = EK.GS$

folglich $\alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 - EK.GS}$, wenn $K\alpha = \alpha S$

je nachdem $KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$

also $p : q \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} FI : IG$ (wie Fall 1. 2.)

Auch ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 2.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

mithin ist eine Linie OX gefunden, welche von den Linien FI, GC, oder FB, GI Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1., oder Fall 2. ist.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FZ, GD. (Fig. 88. 89.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4. Det. muß seyn

$$GS = GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ FI - OK \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

p : q

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} FI - OK \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{folglich } GS = GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 88.), oder schneidet (Fig. 89.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 88. die Linien ES, EH, FI in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist
 $EW : GY < VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.)

also $FZ : GY < p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)
 mithin bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = \sqrt{GE \cdot EK}$, ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt der Linie ES.

Für eine, die Linien ES, EH, FI in γ, β, δ schneidende gerade Linie O γ ist, wenn $\gamma X > XY$, (verm. desselben Zusatzes)

$$E\beta : G\gamma < EW : GY$$

also $F\delta : G\gamma < FZ : GY$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
 mithin bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 89. in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie ES in einem Punkte X', so, daß, wenn die, die Linien EH, FI in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$EH' : GX' = VG : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 2.)}$$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Es ist mithin eine zweite Linie gefunden, welche von den gegebenen Linien Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet.

γ .) auf der Verlängerung von KE.
 (Fig. 90 — 92.) (Loc. XIII.)

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GD. (Fig. 90.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GS, EH, FI in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 1.)

also $FZ : GY \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie GS grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe (verm. lib. I. loc. IV. Fall 1. Zus. 2.) die Linie EK in einem Punkte X' so, dass, wenn die, die Linien EH, FA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$$\underline{EH' : GX' = VG : GS}$$

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)
mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den
Linien FA , GC Segmente in dem gegebenen Verhält-
nisse abschneidet, welches Fall 3. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI ,
 GE . (Fig. 91.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die
Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 2.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GS , EH , FI in Y ,
 W , Z schneidende gerade Linie OY ist

$$\underline{EW : GY \gtrless VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 2. Zus. 1.)}}$$

also $FZ : GY \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)
mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegen-
den Punkte der Linie EG kleinere Verhältnisse, als
die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R'
des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf

TU, so fällt der Durchschnitt X' desselben mit der Linie KC zwischen K, I, oder auf I, oder zwischen I, C, je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KX'$

oder, je nachdem $p:q \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} FI:IG$, wie aus Fall 4. und Fall 5. erhellet. Und es ist, wenn die, die Linien EH, IB in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $EH':GX' = VG:GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 2. Zus. 2.)

also $FL':GX' = p:q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.) mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4., oder Fall 5. ist.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GL (Fig. 90.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man daselbst L', X', H' statt L, X, H setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man daselbst R', X', H', L' statt R, X, H, L setzt.

Beweis.

Es ist $EH':GX' = OK:GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 3.)

also $FL':GX' = p:q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EH, KE, FA in Y' W', Z' schneidende gerade Linie OY' ist

$$EW' : GY' \gtrless VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 3.)}$$

also $FZ' : GY' \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KE grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie GD in dem Punkte X so, dafs, wenn die, die Linien EH, FI in H, L schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$$EH : GX = VG : GS \text{ (lib. I. loc. IV. Fall 3. Zus. 2.)}$$

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.) mithin ist eine Linie OX gefunden, welche von den Linien FI, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 91.)

Analysis.

Buchst., wie zu Fall 3., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 3.

Determination.

Damit X' auf KI liege, muß $KI \geq KX'$ seyn.

$$\text{Nun ist } KX' \cdot X'S \} = EK \cdot GS$$

$$\alpha X'^2 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha K^2 \\ \frac{1}{4} KS^2 \end{array} \right\} \} \text{ wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{also } \alpha X' = \sqrt{\frac{1}{4} KS^2 + EK \cdot GS}$$

$$\text{folglich muß seyn } KI \geq \sqrt{\frac{1}{4} KS^2 + EK \cdot GS} - \frac{1}{2} KS$$

$$\text{mithin } KI^2 + IK \cdot KS + \frac{1}{4} KS^2 \geq \frac{1}{4} KS^2 + EK \cdot GS$$

$$\text{somit } KI^2 \geq \left\{ \begin{array}{l} EK \cdot GS - IK \cdot KS \\ EK \cdot GS - IK \cdot KG + IK \cdot GS \\ IE \cdot GS - IK \cdot KG \end{array} \right.$$

$$\text{demnach } KI(IK + KG) \geq IE \cdot GS$$

$$KI \cdot IG$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left. \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} \geq \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \geq FI : IG \text{ (Det.)}$$

also $KI \geq KX'$, wie leicht aus der
Determination hervorgehet.

Auch ist $EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien KI, IB, EH in Y', Z', W' schneidende gerade Linie OY' ist

$EW' : GY' \geq VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 1.)

also $FZ' : GY' \geq p : q$ (wie lib. II. loc. IV. Fall 3. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KI grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe (verm. lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 2.) die Linie GE in dem Punkte X so, daß, wenn die, die Linien EH, FI in H, L schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$EH : GX = VG : GS$

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.) mithin ist eine Linie OX gefunden, welche von den Linien FI, GE Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 2. ist.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC. (Fig. 92.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. IV. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf IC liege, muß $KI \leq KX$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

$$\alpha X^2 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha K^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$\text{folglich muß seyn } KI \leq \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS} - \frac{1}{2}KS$$

$$\text{mithin } KI^2 + IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \leq \frac{1}{4}KS^2 + EK.GS$$

$$\text{somit } KI^2 \leq \left\{ \begin{array}{l} EK.GS - IK.KS \\ IK(KG - GS) \\ IE.GS - IK.KG \end{array} \right.$$

$$\text{demnach } \left\{ \begin{array}{l} KI(IK + KG) \\ KI.IG \end{array} \right\} \leq IE.GS$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} \leq \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right.$$

Beweis.

Es ist $p : q = FI : IG$

also $KI < KX$, wie leicht aus der Determination erhellet.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4.)

folglich $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien IC, IF, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY > VG : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4. Zus. 1.)

also $FZ : GY > p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IC kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 4. Zus. 2., wenn man R', X', H', L' statt R, X, H, L setzt.

c.) auf der Linie KI. (Fig. 93 — 98.)
(Loc. XIV.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC. (Fig. 93.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf IC liege, muß $KI \overset{=}{<} KX$ seyn.

$$\text{Nun ist } KX.XS \overset{=}{<} EK.GS$$

$$\alpha X^2 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha K^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{also } \alpha X = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$\text{folglich muß seyn } KI \overset{=}{<} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$[\text{mithin } KI^2 - IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \overset{=}{<} \frac{1}{4}KS^2 + EK.GS]$$

$$\text{somit } KI^2 \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} EK.GS + \{ IK.KS \\ \quad \quad \quad \{ IK.(KG + GS) \\ EI.GS + IK.KG \end{array} \right.$$

$$\text{demnach } \left\{ \begin{array}{l} KI.(IK - KG) \\ KI.IG \end{array} \right\} \overset{=}{<} EI.GS$$

$$\text{also } \left\{ \begin{array}{l} KI : IE \\ OF : FE \\ VN : NG \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} SG \\ MN \end{array} \right\} : GI$$

$$\text{folglich } \left\{ \begin{array}{l} VN : NM \\ p : q \end{array} \right\} \overset{=}{<} \left\{ \begin{array}{l} NG : GI \\ FI : IG \end{array} \right.$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \overset{=}{<} FI : IG \text{ (Det.)}$$

also $KI \overset{=}{<} KX$, wie leicht aus der
Determination hervorgehet.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien CI, IF, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY > VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 1.)

also $FZ : GY < p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IC grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU , so schneidet dasselbe die Linie KE in X' so, daß, wenn die, die Linien EH, FA in H', L' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 4. ist.

Fall 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI . (Fig. 94.)

Analysis. Construction.

Buchst., wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf GI liege, muß $KI \stackrel{=}{>} KX$ seyn.

Nun ist $KX.XS = EK.GS$

$$\text{also } K\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

folglich muß seyn $KI \stackrel{=}{>} \frac{1}{2}KS + \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$

also $p : q \stackrel{=}{>} FI : IG$, wie leicht erhellet.

Beweis.

Es ist $p : q \stackrel{=}{>} FI : IG$ (Det.)

also $KI \stackrel{=}{>} KX$, wie aus der Determination leicht hervorgehet.

Auch ist $EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GI, IB, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY \stackrel{=}{>} VG : GS \quad (\text{lib. I. loc. VII. Fall 1. Zus. 1.})$$

also $FZ : GY \stackrel{=}{>} p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IG kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 1. Zus. 2.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GK. (Fig. 95. 96.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 2. Det. muß seyn

$$GS = GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ FI - OK \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} FI - OK \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } GS = GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 95.), oder schneidet (Fig. 96.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 2.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 95. die Linien KS, IB, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY < VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 2. Zus. 1.)

also $FZ : GY < p : q$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
mithin bestimmt der Halbirungspunkt α der Linie KS, für welchen $E\alpha = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein größeres Verhältniß, als jeder andere Punkt derselben.

Auch ist, wenn $\gamma\alpha > \alpha Y$, und die, die Linien IB, EH in δ, β schneidende gerade Linie $O\gamma$ gezogen wird, $E\beta : G\gamma > EW : GY$ (lib. I. loc. VII. Fall 2. Zus. 1.)

also $F\delta : G\gamma > FZ : GY$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
mithin bestimmen die dem Punkte α näher liegenden Punkte der Linie KS größere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 96. in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, welches die Linie KS in X' schneide, so ist, wenn die, die Linien IB, EH in L', H' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird,

$EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 2. Zus. 2.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)
mithin ist eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft gefunden.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GE. (Fig. 93.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man L', H', X' statt L, H, X setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man R', L', H', X' statt R, L, H, X setzt.

Beweis.

Es ist $EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3.)

also $FL' : GX' = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EK, EH, FA in Y', W', Z' schneidende gerade Linie OY' ist

$EW' : GY' \geq VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Zus. 1.)

also $FZ' : GY' \geq p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KE grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' der Linie TU und des Kreises ein Perpendikel auf TU , so schneidet dasselbe die Linie SC in einem Punkte X zwischen C, I , oder in I , oder zwischen S, I ,

je nachdem $KI \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} KX$

dafs heisst, je nachdem $p : q \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} FI : IG$, wie aus Fall 1.

und Fall 2. erhellet. Es ist auch, wenn die, die Linien AB, EH in L, H schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$EH : GX = VG : GS$ (lib. I. loc. VII. Fall 3. Zus. 2.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

mithin ist eine Linie OX gefunden, welche von den Linien FI, GC, oder FB, GI Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1., oder Fall 2. ist.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GD. (Fig. 97. 98.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VII. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VII. Fall 4. Det. muß seyn

$$GS = GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{matrix} GS \\ NM \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} VN \\ FI - OK \end{matrix} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q = \left\{ \begin{matrix} FI - OK \\ VN \end{matrix} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$$

$$\text{folglich } GS = GE + EK + 2\sqrt{GE.EK}$$

mithin berührt (Fig. 97.), oder schneidet (Fig. 98.) der Kreis die Linie TU.

Auch ist EH : GX = OK : GS (lib. I. loc. VII. Fall 4.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 97. die Linien ES, FI, EH in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY < VG : GS \text{ (lib. I. loc. VII. Fall 4. Zus. 1.)}$$

also $FZ : GY < p : q$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
mithin bestimmt der Halbirungspunkt α von KS, für welchen $E\alpha = \sqrt{GE \cdot EK}$, ein größeres Verhältniss, als jeder andere Punkt der Linie ES.

Auch bestimmen die dem Punkte α näher liegenden Punkte grössere Verhältnisse, als die entfernteren, wie Fall 3. Zus. 1.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt R' der Linie TU und des Kreises bestimmt, wie Fall 3. Zus. 2., eine zweite Linie OX' mit der gegebenen Eigenschaft.

3.) auf Ia. (Fig. 99 — 104.) Der Punkt G liege

A.) auf der Linie IC.

Ist erlediget durch lib. II. loc. IV. V. VI.

B.) auf der Linie ID.

a.) in K.

Ist erlediget durch lib. II. loc. IX.

b.) auf der Verlängerung von IK.

Ist erlediget durch lib. II. loc. XIV.

c.) auf der Linie IK. (Fig. 99 — 104.)
(Loc. X.)

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GD. (Fig. 99.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 1. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Beweis.

Es ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien KD, FA, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \gtrless VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 1.)

also $FZ : GY \gtrless p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie KD grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R' des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe die Linie EI (vermöge lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 1.) zwischen G, I, oder in I, oder zwi-

schen I, E, je nachdem $KI \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} KX$

dafs heifst, je nachdem $p:q \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} FI:IG$, wie aus Fall 3.

und Fall 4. erhellet. Auch ist, wenn die, die Linien AB, EH in L', H' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $EH':GX' = VG:GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1. Zus. 1.)

also $FL':GX' = p:q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2) mithin ist eine Linie OX' gefunden, welche von den Linien FB, GI, oder FI, GC Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 3., oder Fall 4. ist.

F a l l 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GK. (Fig. 100. 101.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 2. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 2. Det. muß seyn

$$GS < GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \begin{cases} GS \\ NM \end{cases} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} VN \\ OK - FI \end{cases} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$p:q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p:q \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \begin{cases} OK - FI \\ VN \end{cases} : GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$VN:GS$$

$$\text{also } GS = GE + EK - 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 100.), oder schneidet (Fig. 101.) der Kreis die Linie TU.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 1.)

$$\text{also } FL : GX = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 100. die Linien GK, IB, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$$EW : GY > VG : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 1.)}$$

also $FZ : GY > p : q$ (wie lib. II. loc. IV. Fall 2. Zus. 1.)
mithin bestimmt der Halbirungspunkt α von KS, für welchen $E\alpha = \sqrt{GE \cdot EK}$, kleinere Verhältnisse, als jeder andere Punkt der Linie KG.

Auch ist, wenn $\gamma\alpha > \alpha Y$, und die, die Linien IB, EH in δ, β schneidende gerade Linie O γ gezogen wird, $E\beta : G\gamma > EW : GY$ (lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 1.)

also $F\delta : G\gamma > FZ : GY$ (wie lib. II. loc. IV. Fall 2. Zus. 1.)
mithin bestimmen die dem Punkte α näher liegenden Punkte der Linie GK kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt R' (Fig. 101.) des Kreises und der Linie TU bestimmt (verm. lib. I. loc. VI. Fall 2. Zus. 2.) eine zweite Linie OX' mit der gegebenen Eigenschaft.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GI. (Fig. 99.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man H', X', L' statt H, X, L setzt, also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., wenn man R', X', H', L' statt R, X, H, L setzt,

Determination.

Damit der Punkt X' auf GI falle, muß $KI \geq KX'$ seyn.

$$\text{Nun ist } KX'.X'S \left\{ \begin{array}{l} = EK.GS \\ \alpha X'^2 - \left\{ \begin{array}{l} \alpha K^2 \\ \frac{1}{4}KS^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \text{wenn } K\alpha = \alpha S$$

$$\text{somit } \alpha X' = \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS}$$

$$\text{mithin muß seyn } KI \geq \sqrt{\frac{1}{4}KS^2 + EK.GS} - \frac{1}{2}KS$$

$$\text{also } KI^2 + IK.KS + \frac{1}{4}KS^2 \geq \frac{1}{4}KS^2 + EK.GS$$

$$\text{folglich } KI^2 \geq \left\{ \begin{array}{l} EK.GS - \left\{ \begin{array}{l} IK.KS \\ IK(SG - GK) \end{array} \right\} \\ EI.GS + IK.KG \end{array} \right.$$

$$\text{mithin } KI(IK - KG) \left\{ \begin{array}{l} = IE.GS \\ > KI.IG \end{array} \right.$$

$$\text{somit } KI : IE \left\{ \begin{array}{l} = SG \\ > MN \end{array} \right\} : GI$$

$$OF : FE \left\{ \begin{array}{l} = SG \\ > MN \end{array} \right\}$$

$$VN : NG \left\{ \begin{array}{l} = SG \\ > MN \end{array} \right\}$$

$$\text{demnach } VN : NM \left\{ \begin{array}{l} = \\ > \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} NG \\ FI \end{array} \right\} : IG$$

$$p : q$$

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \stackrel{=}{>} FI : IG \text{ (Det.)}$$

also $FI \stackrel{=}{>} KX'$, wie aus der Determination leicht hervorgehet.

Ferner ist $EH' : GX' = VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3.)

$$\text{also } FL' : GX' = p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 2.)}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien GI, IB, EH in Y', Z', W' schneidende gerade Linie OY' ist

$$EH' : GX' \stackrel{=}{>} VG : GS \text{ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 1.)}$$

$$\text{also } FL' : GX' \stackrel{=}{>} p : q \text{ (wie lib. II. loc. I. Fall 3. Zus. 1.)}$$

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IG kleinere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte R des Kreises und der Linie TU ein Perpendikel auf TU, so schneidet dasselbe (verm. lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 2.) die Linie KD in dem Punkte X so, daß, wenn die, die Linien FA, EH in L, H schneidende gerade Linie OX gezogen wird,

$$EH : GX = VG : GS$$

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.) mithin ist eine Linie OX gefunden, welche von den Linien FA, GD Segmente in dem gegebenen Verhältnisse abschneidet, welches Fall 1. ist.

Fall 4.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FI, GC. (Fig. 102.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 3. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt X auf IE falle, muß $KI \overset{=}{<} KX$ seyn.

Nun ist $KX, XS = EK, GS$

also muß seyn $p : q \overset{=}{<} FI : IG$, wie aus Fall 3. Det. leicht erhellet.

Beweis.

Es ist $p : q \overset{=}{<} FI : IG$ (Det.)

also $KI \overset{=}{<} KX$, wie aus der Determination leicht hervorgehet.

Ferner ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien EI, IA, EH in Y, Z, W schneidende gerade Linie OY ist

$EW : GY \overset{>}{<} VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 3. Zus. 1.)

also $FZ : GY \overset{>}{<} p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Zus. 1.)

mithin bestimmen die dem Punkte I näher liegenden Punkte der Linie IE grössere Verhältnisse, als die entfernteren.

Zus. 2.

Buchst., wie Fall 3. Zus. 2., wenn X', L', H', R' statt X, L, H, R gesetzt wird.

Fall 5.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GC. (Fig. 103. 104.)

Analysis.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1., also ist die Aufgabe auf lib. I. loc. VI. Fall 4. reducirt.

Construction.

Buchst., wie zu lib. II. loc. I. Fall 1.

Determination.

Vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4. Det. muß seyn

$$GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

$$\text{also } VN : \left\{ \begin{array}{l} GS \\ NM \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} VN \\ OK - FI \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

p : q

Beweis.

$$\text{Es ist } p : q \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} OK - FI \\ VN \end{array} \right\} : GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK} \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } GS \geq GE + EK + 2\sqrt{GE \cdot EK}$$

mithin berührt (Fig. 103.), oder schneidet (Fig. 104.) der Kreis die Linie TU.

Auch ist $EH : GX = OK : GS$ (lib. I. loc. IV. Fall 4.)

also $FL : GX = p : q$ (wie lib. II. loc. I. Fall 1. Bew.)

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 103. die Linien ES , EH , IA in Y, W, Z schneidende gerade Linie OY ist
 $EW : GY < VG : GS$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.)

also $FZ : GY < p : q$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
 mithin bestimmt der Halbirungspunkt α der Linie KS ,
 für welchen $E\alpha = \sqrt{KE \cdot EG}$, ein größeres Verhältniß,
 als jeder andere Punkt derselben.

Auch ist, wenn $\gamma\alpha > \alpha Y$, und wenn die, die Linien EH , IA in β, δ schneidende gerade Linie $O\delta$ gezogen wird,

$E\beta : G\gamma < EW : GY$ (lib. I. loc. VI. Fall 4. Zus. 1.)

also $F\delta : G\gamma < FZ : GY$ (wie lib. II. loc. III. Fall 4. Zus. 1.)
 mithin bestimmen die dem Punkte α näher liegenden
 Punkte der Linie ES kleinere Verhältnisse, als die
 entfernteren.

Zus. 2.

Der zweite Durchschnitt R' der Linie TU und
 des Kreises bestimmt (vermöge lib. I. loc. VI. Fall 4.
 Zus. 2.) eine zweite Linie OX' mit der gegebenen
 Eigenschaft.

A N H A N G

z u d e n

BÜCHERN des APOLLONIUS von PERGA

de sectione rationis.

I. Der Punkt O liegt beiden Parallelen auf derselben Seite.

Fall 1.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GD. (Fig. 103.)

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist, wenn die, die Linien CY in B abbrechende gerade Linie FO gezogen wird,

(1. Aufl. 1871, 2. Aufl. 1874, 3. Aufl. 1877, 4. Aufl. 1880, 5. Aufl. 1883, 6. Aufl. 1886, 7. Aufl. 1889, 8. Aufl. 1892, 9. Aufl. 1895, 10. Aufl. 1898, 11. Aufl. 1901, 12. Aufl. 1904, 13. Aufl. 1907, 14. Aufl. 1910, 15. Aufl. 1913, 16. Aufl. 1916, 17. Aufl. 1919, 18. Aufl. 1922, 19. Aufl. 1925, 20. Aufl. 1928, 21. Aufl. 1931, 22. Aufl. 1934, 23. Aufl. 1937, 24. Aufl. 1940, 25. Aufl. 1943, 26. Aufl. 1946, 27. Aufl. 1949, 28. Aufl. 1952, 29. Aufl. 1955, 30. Aufl. 1958, 31. Aufl. 1961, 32. Aufl. 1964, 33. Aufl. 1967, 34. Aufl. 1970, 35. Aufl. 1973, 36. Aufl. 1976, 37. Aufl. 1979, 38. Aufl. 1982, 39. Aufl. 1985, 40. Aufl. 1988, 41. Aufl. 1991, 42. Aufl. 1994, 43. Aufl. 1997, 44. Aufl. 2000, 45. Aufl. 2003, 46. Aufl. 2006, 47. Aufl. 2009, 48. Aufl. 2012, 49. Aufl. 2015, 50. Aufl. 2018, 51. Aufl. 2021, 52. Aufl. 2024, 53. Aufl. 2027, 54. Aufl. 2030, 55. Aufl. 2033, 56. Aufl. 2036, 57. Aufl. 2039, 58. Aufl. 2042, 59. Aufl. 2045, 60. Aufl. 2048, 61. Aufl. 2051, 62. Aufl. 2054, 63. Aufl. 2057, 64. Aufl. 2060, 65. Aufl. 2063, 66. Aufl. 2066, 67. Aufl. 2069, 68. Aufl. 2072, 69. Aufl. 2075, 70. Aufl. 2078, 71. Aufl. 2081, 72. Aufl. 2084, 73. Aufl. 2087, 74. Aufl. 2090, 75. Aufl. 2093, 76. Aufl. 2096, 77. Aufl. 2099, 78. Aufl. 2102, 79. Aufl. 2105, 80. Aufl. 2108, 81. Aufl. 2111, 82. Aufl. 2114, 83. Aufl. 2117, 84. Aufl. 2120, 85. Aufl. 2123, 86. Aufl. 2126, 87. Aufl. 2129, 88. Aufl. 2132, 89. Aufl. 2135, 90. Aufl. 2138, 91. Aufl. 2141, 92. Aufl. 2144, 93. Aufl. 2147, 94. Aufl. 2150, 95. Aufl. 2153, 96. Aufl. 2156, 97. Aufl. 2159, 98. Aufl. 2162, 99. Aufl. 2165, 100. Aufl. 2168, 101. Aufl. 2171, 102. Aufl. 2174, 103. Aufl. 2177, 104. Aufl. 2180, 105. Aufl. 2183, 106. Aufl. 2186, 107. Aufl. 2189, 108. Aufl. 2192, 109. Aufl. 2195, 110. Aufl. 2198, 111. Aufl. 2201, 112. Aufl. 2204, 113. Aufl. 2207, 114. Aufl. 2210, 115. Aufl. 2213, 116. Aufl. 2216, 117. Aufl. 2219, 118. Aufl. 2222, 119. Aufl. 2225, 120. Aufl. 2228, 121. Aufl. 2231, 122. Aufl. 2234, 123. Aufl. 2237, 124. Aufl. 2240, 125. Aufl. 2243, 126. Aufl. 2246, 127. Aufl. 2249, 128. Aufl. 2252, 129. Aufl. 2255, 130. Aufl. 2258, 131. Aufl. 2261, 132. Aufl. 2264, 133. Aufl. 2267, 134. Aufl. 2270, 135. Aufl. 2273, 136. Aufl. 2276, 137. Aufl. 2279, 138. Aufl. 2282, 139. Aufl. 2285, 140. Aufl. 2288, 141. Aufl. 2291, 142. Aufl. 2294, 143. Aufl. 2297, 144. Aufl. 2300, 145. Aufl. 2303, 146. Aufl. 2306, 147. Aufl. 2309, 148. Aufl. 2312, 149. Aufl. 2315, 150. Aufl. 2318, 151. Aufl. 2321, 152. Aufl. 2324, 153. Aufl. 2327, 154. Aufl. 2330, 155. Aufl. 2333, 156. Aufl. 2336, 157. Aufl. 2339, 158. Aufl. 2342, 159. Aufl. 2345, 160. Aufl. 2348, 161. Aufl. 2351, 162. Aufl. 2354, 163. Aufl. 2357, 164. Aufl. 2360, 165. Aufl. 2363, 166. Aufl. 2366, 167. Aufl. 2369, 168. Aufl. 2372, 169. Aufl. 2375, 170. Aufl. 2378, 171. Aufl. 2381, 172. Aufl. 2384, 173. Aufl. 2387, 174. Aufl. 2390, 175. Aufl. 2393, 176. Aufl. 2396, 177. Aufl. 2399, 178. Aufl. 2402, 179. Aufl. 2405, 180. Aufl. 2408, 181. Aufl. 2411, 182. Aufl. 2414, 183. Aufl. 2417, 184. Aufl. 2420, 185. Aufl. 2423, 186. Aufl. 2426, 187. Aufl. 2429, 188. Aufl. 2432, 189. Aufl. 2435, 190. Aufl. 2438, 191. Aufl. 2441, 192. Aufl. 2444, 193. Aufl. 2447, 194. Aufl. 2450, 195. Aufl. 2453, 196. Aufl. 2456, 197. Aufl. 2459, 198. Aufl. 2462, 199. Aufl. 2465, 200. Aufl. 2468, 201. Aufl. 2471, 202. Aufl. 2474, 203. Aufl. 2477, 204. Aufl. 2480, 205. Aufl. 2483, 206. Aufl. 2486, 207. Aufl. 2489, 208. Aufl. 2492, 209. Aufl. 2495, 210. Aufl. 2498, 211. Aufl. 2501, 212. Aufl. 2504, 213. Aufl. 2507, 214. Aufl. 2510, 215. Aufl. 2513, 216. Aufl. 2516, 217. Aufl. 2519, 218. Aufl. 2522, 219. Aufl. 2525, 220. Aufl. 2528, 221. Aufl. 2531, 222. Aufl. 2534, 223. Aufl. 2537, 224. Aufl. 2540, 225. Aufl. 2543, 226. Aufl. 2546, 227. Aufl. 2549, 228. Aufl. 2552, 229. Aufl. 2555, 230. Aufl. 2558, 231. Aufl. 2561, 232. Aufl. 2564, 233. Aufl. 2567, 234. Aufl. 2570, 235. Aufl. 2573, 236. Aufl. 2576, 237. Aufl. 2579, 238. Aufl. 2582, 239. Aufl. 2585, 240. Aufl. 2588, 241. Aufl. 2591, 242. Aufl. 2594, 243. Aufl. 2597, 244. Aufl. 2600, 245. Aufl. 2603, 246. Aufl. 2606, 247. Aufl. 2609, 248. Aufl. 2612, 249. Aufl. 2615, 250. Aufl. 2618, 251. Aufl. 2621, 252. Aufl. 2624, 253. Aufl. 2627, 254. Aufl. 2630, 255. Aufl. 2633, 256. Aufl. 2636, 257. Aufl. 2639, 258. Aufl. 2642, 259. Aufl. 2645, 260. Aufl. 2648, 261. Aufl. 2651, 262. Aufl. 2654, 263. Aufl. 2657, 264. Aufl. 2660, 265. Aufl. 2663, 266. Aufl. 2666, 267. Aufl. 2669, 268. Aufl. 2672, 269. Aufl. 2675, 270. Aufl. 2678, 271. Aufl. 2681, 272. Aufl. 2684, 273. Aufl. 2687, 274. Aufl. 2690, 275. Aufl. 2693, 276. Aufl. 2696, 277. Aufl. 2699, 278. Aufl. 2702, 279. Aufl. 2705, 280. Aufl. 2708, 281. Aufl. 2711, 282. Aufl. 2714, 283. Aufl. 2717, 284. Aufl. 2720, 285. Aufl. 2723, 286. Aufl. 2726, 287. Aufl. 2729, 288. Aufl. 2732, 289. Aufl. 2735, 290. Aufl. 2738, 291. Aufl. 2741, 292. Aufl. 2744, 293. Aufl. 2747, 294. Aufl. 2750, 295. Aufl. 2753, 296. Aufl. 2756, 297. Aufl. 2759, 298. Aufl. 2762, 299. Aufl. 2765, 300. Aufl. 2768, 301. Aufl. 2771, 302. Aufl. 2774, 303. Aufl. 2777, 304. Aufl. 2780, 305. Aufl. 2783, 306. Aufl. 2786, 307. Aufl. 2789, 308. Aufl. 2792, 309. Aufl. 2795, 310. Aufl. 2798, 311. Aufl. 2801, 312. Aufl. 2804, 313. Aufl. 2807, 314. Aufl. 2810, 315. Aufl. 2813, 316. Aufl. 2816, 317. Aufl. 2819, 318. Aufl. 2822, 319. Aufl. 2825, 320. Aufl. 2828, 321. Aufl. 2831, 322. Aufl. 2834, 323. Aufl. 2837, 324. Aufl. 2840, 325. Aufl. 2843, 326. Aufl. 2846, 327. Aufl. 2849, 328. Aufl. 2852, 329. Aufl. 2855, 330. Aufl. 2858, 331. Aufl. 2861, 332. Aufl. 2864, 333. Aufl. 2867, 334. Aufl. 2870, 335. Aufl. 2873, 336. Aufl. 2876, 337. Aufl. 2879, 338. Aufl. 2882, 339. Aufl. 2885, 340. Aufl. 2888, 341. Aufl. 2891, 342. Aufl. 2894, 343. Aufl. 2897, 344. Aufl. 2900, 345. Aufl. 2903, 346. Aufl. 2906, 347. Aufl. 2909, 348. Aufl. 2912, 349. Aufl. 2915, 350. Aufl. 2918, 351. Aufl. 2921, 352. Aufl. 2924, 353. Aufl. 2927, 354. Aufl. 2930, 355. Aufl. 2933, 356. Aufl. 2936, 357. Aufl. 2939, 358. Aufl. 2942, 359. Aufl. 2945, 360. Aufl. 2948, 361. Aufl. 2951, 362. Aufl. 2954, 363. Aufl. 2957, 364. Aufl. 2960, 365. Aufl. 2963, 366. Aufl. 2966, 367. Aufl. 2969, 368. Aufl. 2972, 369. Aufl. 2975, 370. Aufl. 2978, 371. Aufl. 2981, 372. Aufl. 2984, 373. Aufl. 2987, 374. Aufl. 2990, 375. Aufl. 2993, 376. Aufl. 2996, 377. Aufl. 2999, 378. Aufl. 3002, 379. Aufl. 3005, 380. Aufl. 3008, 381. Aufl. 3011, 382. Aufl. 3014, 383. Aufl. 3017, 384. Aufl. 3020, 385. Aufl. 3023, 386. Aufl. 3026, 387. Aufl. 3029, 388. Aufl. 3032, 389. Aufl. 3035, 390. Aufl. 3038, 391. Aufl. 3041, 392. Aufl. 3044, 393. Aufl. 3047, 394. Aufl. 3050, 395. Aufl. 3053, 396. Aufl. 3056, 397. Aufl. 3059, 398. Aufl. 3062, 399. Aufl. 3065, 400. Aufl. 3068, 401. Aufl. 3071, 402. Aufl. 3074, 403. Aufl. 3077, 404. Aufl. 3080, 405. Aufl. 3083, 406. Aufl. 3086, 407. Aufl. 3089, 408. Aufl. 3092, 409. Aufl. 3095, 410. Aufl. 3098, 411. Aufl. 3101, 412. Aufl. 3104, 413. Aufl. 3107, 414. Aufl. 3110, 415. Aufl. 3113, 416. Aufl. 3116, 417. Aufl. 3119, 418. Aufl. 3122, 419. Aufl. 3125, 420. Aufl. 3128, 421. Aufl. 3131, 422. Aufl. 3134, 423. Aufl. 3137, 424. Aufl. 3140, 425. Aufl. 3143, 426. Aufl. 3146, 427. Aufl. 3149, 428. Aufl. 3152, 429. Aufl. 3155, 430. Aufl. 3158, 431. Aufl. 3161, 432. Aufl. 3164, 433. Aufl. 3167, 434. Aufl. 3170, 435. Aufl. 3173, 436. Aufl. 3176, 437. Aufl. 3179, 438. Aufl. 3182, 439. Aufl. 3185, 440. Aufl. 3188, 441. Aufl. 3191, 442. Aufl. 3194, 443. Aufl. 3197, 444. Aufl. 3200, 445. Aufl. 3203, 446. Aufl. 3206, 447. Aufl. 3209, 448. Aufl. 3212, 449. Aufl. 3215, 450. Aufl. 3218, 451. Aufl. 3221, 452. Aufl. 3224, 453. Aufl. 3227, 454. Aufl. 3230, 455. Aufl. 3233, 456. Aufl. 3236, 457. Aufl. 3239, 458. Aufl. 3242, 459. Aufl. 3245, 460. Aufl. 3248, 461. Aufl. 3251, 462. Aufl. 3254, 463. Aufl. 3257, 464. Aufl. 3260, 465. Aufl. 3263, 466. Aufl. 3266, 467. Aufl. 3269, 468. Aufl. 3272, 469. Aufl. 3275, 470. Aufl. 3278, 471. Aufl. 3281, 472. Aufl. 3284, 473. Aufl. 3287, 474. Aufl. 3290, 475. Aufl. 3293, 476. Aufl. 3296, 477. Aufl. 3299, 478. Aufl. 3302, 479. Aufl. 3305, 480. Aufl. 3308, 481. Aufl. 3311, 482. Aufl. 3314, 483. Aufl. 3317, 484. Aufl. 3320, 485. Aufl. 3323, 486. Aufl. 3326, 487. Aufl. 3329, 488. Aufl. 3332, 489. Aufl. 3335, 490. Aufl. 3338, 491. Aufl. 3341, 492. Aufl. 3344, 493. Aufl. 3347, 494. Aufl. 3350, 495. Aufl. 3353, 496. Aufl. 3356, 497. Aufl. 3359, 498. Aufl. 3362, 499. Aufl. 3365, 500. Aufl. 3368, 501. Aufl. 3371, 502. Aufl. 3374, 503. Aufl. 3377, 504. Aufl. 3380, 505. Aufl. 3383, 506. Aufl. 3386, 507. Aufl. 3389, 508. Aufl. 3392, 509. Aufl. 3395, 510. Aufl. 3398, 511. Aufl. 3401, 512. Aufl. 3404, 513. Aufl. 3407, 514. Aufl. 3410, 515. Aufl. 3413, 516. Aufl. 3416, 517. Aufl. 3419, 518. Aufl. 3422, 519. Aufl. 3425, 520. Aufl. 3428, 521. Aufl. 3431, 522. Aufl. 3434, 523. Aufl. 3437, 524. Aufl. 3440, 525. Aufl. 3443, 526. Aufl. 3446, 527. Aufl. 3449, 528. Aufl. 3452, 529. Aufl. 3455, 530. Aufl. 3458, 531. Aufl. 3461, 532. Aufl. 3464, 533. Aufl. 3467, 534. Aufl. 3470, 535. Aufl. 3473, 536. Aufl. 3476, 537. Aufl. 3479, 538. Aufl. 3482, 539. Aufl. 3485, 540. Aufl. 3488, 541. Aufl. 3491, 542. Aufl. 3494, 543. Aufl. 3497, 544. Aufl. 3500, 545. Aufl. 3503, 546. Aufl. 3506, 547. Aufl. 3509, 548. Aufl. 3512, 549. Aufl. 3515, 550. Aufl. 3518, 551. Aufl. 3521, 552. Aufl. 3524, 553. Aufl. 3527, 554. Aufl. 3530, 555. Aufl. 3533, 556. Aufl. 3536, 557. Aufl. 3539, 558. Aufl. 3542, 559. Aufl. 3545, 560. Aufl. 3548, 561. Aufl. 3551, 562. Aufl. 3554, 563. Aufl. 3557, 564. Aufl. 3560, 565. Aufl. 3563, 566. Aufl. 3566, 567. Aufl. 3569, 568. Aufl. 3572, 569. Aufl. 3575, 570. Aufl. 3578, 571. Aufl. 3581, 572. Aufl. 3584, 573. Aufl. 3587, 574. Aufl. 3590, 575. Aufl. 3593, 576. Aufl. 3596, 577. Aufl. 3599, 578. Aufl. 3602, 579. Aufl. 3605, 580. Aufl. 3608, 581. Aufl. 3611, 582. Aufl. 3614, 583. Aufl. 3617, 584. Aufl. 3620, 585. Aufl. 3623, 586. Aufl. 3626, 587. Aufl. 3629, 588. Aufl. 3632, 589. Aufl. 3635, 590. Aufl. 3638, 591. Aufl. 3641, 592. Aufl. 3644, 593. Aufl. 3647, 594. Aufl. 3650, 595. Aufl. 3653, 596. Aufl. 3656, 597. Aufl. 3659, 598. Aufl. 3662, 599. Aufl. 3665, 600. Aufl. 3668, 601. Aufl. 3671, 602. Aufl. 3674, 603. Aufl. 3677, 604. Aufl. 3680, 605. Aufl. 3683, 606. Aufl. 3686, 607. Aufl. 3689, 608. Aufl. 3692, 609. Aufl. 3695, 610. Aufl. 3698, 611. Aufl. 3701, 612. Aufl. 3704, 613. Aufl. 3707, 614. Aufl. 3710, 615. Aufl. 3713, 616. Aufl. 3716, 617. Aufl. 3719, 618. Aufl. 3722, 619. Aufl. 3725, 620. Aufl. 3728, 621. Aufl. 3731, 622. Aufl. 3734, 623. Aufl. 3737, 624. Aufl. 3740, 625. Aufl. 3743, 626. Aufl. 3746, 627. Aufl. 3749, 628. Aufl. 3752, 629. Aufl. 3755, 630. Aufl. 3758, 631. Aufl. 3761, 632. Aufl. 3764, 633. Aufl. 3767, 634. Aufl. 3770, 635. Aufl. 3773, 636. Aufl. 3776, 637. Aufl. 3779, 638. Aufl. 3782, 639. Aufl. 3785, 640. Aufl. 3788, 641. Aufl. 3791, 642. Aufl. 3794, 643. Aufl. 3797, 644. Aufl. 3800, 645. Aufl. 3803, 646. Aufl. 3806, 647. Aufl. 3809, 648. Aufl. 3812, 649. Aufl. 3815, 650. Aufl. 3818, 651. Aufl. 3821, 652. Aufl. 3824, 653. Aufl. 3827, 654. Aufl. 3830, 655. Aufl. 3833, 656. Aufl. 3836, 657. Aufl. 3839, 658. Aufl. 3842, 659. Aufl. 3845, 660. Aufl. 3848, 661. Aufl. 3851, 662. Aufl. 3854, 663. Aufl. 3857, 664. Aufl. 3860, 665. Aufl. 3863, 666. Aufl. 3866, 667. Aufl. 3869, 668. Aufl. 3872, 669. Aufl. 3875, 670. Aufl. 3878, 671. Aufl. 3881, 672. Aufl. 3884, 673. Aufl. 3887, 674. Aufl. 3890, 675. Aufl. 3893, 676. Aufl. 3896, 677. Aufl. 3899, 678. Aufl. 3902, 679. Aufl. 3905, 680. Aufl. 3908, 681. Aufl. 3911, 682. Aufl. 3914, 683. Aufl. 3917, 684. Aufl. 3920, 685. Aufl. 3923, 686. Aufl. 3926, 687. Aufl. 3929, 688. Aufl. 3932, 689. Aufl. 3935, 690. Aufl. 3938, 691. Aufl. 3941, 692. Aufl. 3944, 693. Aufl. 3947, 694. Aufl. 3950, 695. Aufl. 3953, 696. Aufl. 3956, 697. Aufl. 3959, 698. Aufl. 3962, 699. Aufl. 3965, 700. Aufl. 3968, 701. Aufl. 3971, 702. Aufl. 3974, 703. Aufl. 3977, 704. Aufl. 3980, 705. Aufl. 3983, 706. Aufl. 3986, 707. Aufl. 3989, 708. Aufl. 3992, 709. Aufl. 3995, 710. Aufl. 3998, 711. Aufl. 4001, 712. Aufl. 4004, 713. Aufl. 4007, 714. Aufl. 4010, 715. Aufl. 4013, 716. Aufl. 4016, 717. Aufl. 4019, 718. Aufl. 4022, 719. Aufl. 4025, 720. Aufl. 4028, 721. Aufl. 4031, 722. Aufl. 4034, 723. Aufl. 4037, 724. Aufl. 4040, 725. Aufl. 4043, 726. Aufl. 4046, 727. Aufl. 4049, 728. Aufl. 4052, 729. Aufl. 4055, 730. Aufl. 4058, 731. Aufl. 4061, 732. Aufl. 4064, 733. Aufl. 4067, 734. Aufl. 4070, 735. Aufl. 4073, 736. Aufl. 4076, 737. Aufl. 4079, 738. Aufl. 4082, 739. Aufl. 4085, 740. Aufl. 4088, 741. Aufl. 4091, 742. Aufl. 4094, 743. Aufl. 4097, 744. Aufl. 4100, 745. Aufl. 4103, 746. Aufl. 4106, 747. Aufl. 4109, 748. Aufl. 4112, 749. Aufl. 4115, 750. Aufl. 4118, 751. Aufl. 4121, 752. Aufl. 4124, 753. Aufl. 4127, 754. Aufl. 4130, 755. Aufl. 4133, 756. Aufl. 4136, 757. Aufl. 4139, 758. Aufl. 4142, 759. Aufl. 4145, 760. Aufl. 4148, 761. Aufl. 4151, 762. Aufl. 4154, 763. Aufl. 4157, 764. Aufl. 4160, 765. Aufl. 4163, 766. Aufl. 4166, 767. Aufl. 4169, 768. Aufl. 4172, 769. Aufl. 4175, 770. Aufl. 4178, 771. Aufl. 4181, 772. Aufl. 4184, 773. Aufl. 4187, 774. Aufl. 4190, 775. Aufl. 4193, 776. Aufl. 4196, 777. Aufl. 4199, 778. Aufl. 4202, 779. Aufl. 4205, 780. Aufl. 4208, 781. Aufl. 4211, 782. Aufl. 4214, 783. Aufl. 4217, 784. Aufl. 4220, 785. Aufl. 4223, 786. Aufl. 4226, 787. Aufl. 4229, 788. Aufl. 4232, 789. Aufl. 4235, 790. Aufl. 4238, 791. Aufl. 4241, 792. Aufl. 4244, 793. Aufl. 4247, 794. Aufl. 4250, 795. Aufl. 4253, 796. Aufl. 4256, 797. Aufl. 4259, 798. Aufl. 4262, 799. Aufl. 4265, 800. Aufl. 4268, 801. Aufl. 4271, 802. Aufl. 4274, 803. Aufl. 4277, 804. Aufl. 4280, 805. Aufl. 4283, 806. Aufl. 4286, 807. Aufl. 4289, 808. Aufl. 4292, 809. Aufl. 4295, 810. Aufl. 4298, 811. Aufl. 4301, 812. Aufl. 4304, 813. Aufl. 4307, 814. Aufl. 4310, 815. Aufl. 4313, 816. Aufl. 4316, 817. Aufl. 4319, 818. Aufl. 4322, 819. Aufl. 4325, 820. Aufl. 4328, 821. Aufl. 4331, 822. Aufl. 4334, 823. Aufl. 4337, 824. Aufl. 4340, 825. Aufl. 4343, 826. Aufl. 4346, 827. Aufl. 4349, 828. Aufl. 4352, 829. Aufl. 4355, 830. Aufl. 4358, 831. Aufl. 4361, 832. Aufl. 4364, 833. Aufl. 4367, 834. Aufl. 4370, 835. Aufl. 4373, 836. Aufl. 4376, 837. Aufl. 4379, 838. Aufl. 4382, 839. Aufl. 4385, 840. Aufl. 4388, 841. Aufl. 4391, 842. Aufl. 4394, 843. Aufl. 4397, 844. Aufl. 4400, 845. Aufl. 4403, 846. Aufl. 4406, 847. Aufl. 4409, 848. Aufl. 4412, 849. Aufl. 4415, 850. Aufl. 4418, 851. Aufl. 4421, 852. Aufl. 4424, 853. Aufl. 4427, 854. Aufl. 4430, 855. Aufl. 4433, 856. Aufl. 4436, 857. Aufl. 4439, 858. Aufl. 4442, 859. Aufl. 4445, 860. Aufl. 4448, 861. Aufl. 4451, 862. Aufl. 4454, 863. Aufl. 4457, 864. Aufl. 4460, 865. Aufl. 4463, 866. Aufl. 4466, 867. Aufl. 4469, 868. Aufl. 4472, 869. Aufl. 4475, 870. Aufl. 4478, 871. Aufl. 4481, 872. Aufl. 4484, 873. Aufl. 4487, 874. Aufl. 4490, 875. Aufl. 4493, 876. Aufl. 4496, 877. Aufl. 4499, 878. Aufl. 4502, 879. Aufl. 4505, 880. Aufl. 4508, 881. Aufl. 4511, 882. Aufl. 4514, 883. Aufl. 4517, 884. Aufl. 4520, 885. Aufl. 4523, 886. Aufl. 4526, 887. Aufl. 4529, 888. Aufl. 4532, 889. Aufl. 4535, 890. Aufl. 4538, 891. Aufl. 4541, 892. Aufl. 4544, 893. Aufl. 4547, 894. Aufl. 4550, 895. Aufl. 4553, 896. Aufl. 4556, 897. Aufl. 4559, 898. Aufl. 4562, 899. Aufl. 4565, 900. Aufl. 4568, 901. Aufl. 4571, 902. Aufl. 4574, 903. Aufl. 4577, 904. Aufl. 4580, 905. Aufl. 4583, 906. Aufl. 4586, 907. Aufl. 4589, 908. Aufl. 4592, 909. Aufl. 4595, 910. Aufl. 4598, 911. Aufl. 4601, 912. Aufl. 4604, 913. Aufl. 4607, 914. Aufl. 4610, 915. Aufl. 4613, 916. Aufl. 4616, 917. Aufl. 4619, 918. Aufl. 4622, 919. Aufl. 4625, 920. Aufl. 4628, 921. Aufl. 4631, 922. Aufl. 4634, 923. Aufl. 4637, 924. Aufl. 4640, 925. Aufl. 4643, 926. Aufl. 4646, 927. Aufl. 4649, 928. Aufl. 4652, 929. Aufl. 4655, 930. Aufl. 4658, 931. Aufl. 4661, 932. Aufl. 4664, 933. Aufl. 4667, 934. Aufl. 4670, 935. Aufl. 4673, 936. Aufl. 4676, 937. Aufl. 4679, 938. Aufl. 4682, 939. Aufl. 4685, 940. Aufl. 4688, 941. Aufl. 4691, 942. Aufl. 4694, 943. Aufl. 4697, 944. Aufl. 4700, 945. Aufl. 4703, 946. Aufl. 4706, 947. Aufl. 4709, 948. Aufl. 4712, 949. Aufl. 4715, 950. Aufl. 4718, 951. Aufl. 4721, 952. Aufl. 4724, 953. Aufl. 4727, 954. Aufl. 4730, 955. Aufl. 4733, 956. Aufl. 4736, 957. Aufl. 4739, 958. Aufl. 4742, 959. Aufl.

Aufgabe I. (Fig. 105 — 107.)

Von einem gegebenen Punkte O, welcher sich mit zweyen, der Lage nach gegebenen, nicht durch denselben gezogenen; einander parallelen geraden Linien AB, CD in einer Ebene befindet, eine gerade Linie OX zu ziehen, so daß die Summe der zwischen den Durchschnittspunkten X, Y mit jenen Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten F, G gelegenen Segmente einer gegebenen geraden Linie α gleich sey.

I. Der Punkt O liegt beiden Parallelen auf derselben Seite.

Fall I.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FB, GD. (Fig. 105.)

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist, wenn die, die Linien GY in E schneidende gerade Linie FO gezogen wird,

$$FX : EY = FO : OE$$

$$\begin{array}{l} \text{also } FX + EY \} : EY = FO + OE : OE \\ FX + GY \} - GE \} \\ \alpha \end{array}$$

folglich ist EY, somit Y, und die Linie OY der Lage nach gegeben.

Construction.

Man ziehe OF, welche der Linie CD in E be-
gegne, und mache $HO = OF$, $GK = \alpha$, $OY \parallel HK$, so
ist die, die Linie FB in X schneidende gerade Linie
OY die gesuchte.

Determination.

Damit Y auf ED falle, muß $KG \} > GE$ seyn.
 α

Beweis.

Es ist $\alpha \} > GE$ (Det.)

$KG \}$

also liegt Y zwischen E, K.

$$\begin{array}{l} \text{Ferner ist } HE \} : EO = \left\{ \begin{array}{l} KE \\ FO + OE \end{array} \right\} : EY \\ FX + EY : EY \left\{ \begin{array}{l} KG - GE \\ \alpha - GE \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{also } FX + EY = \alpha - GE$$

$$\begin{array}{l} \text{folglich } FX + EY + GE \} = \alpha \\ FX + GY \} \end{array}$$

Zus.

Für eine andere, die Linien FB, GD in W, Z
schneidende gerade Linie OZ ist

$$FW \geq FX, \quad GZ \geq GY$$

$$\text{also } FW + GZ \geq GY + FX$$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie ED kleinere Summen, als die entfernteren.

F a l l 2.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA, GC. (Fig. 106.)

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist, wenn die, die Linie CD in E schneidende gerade Linie OF gezogen wird, $FX : EY = FO : OE$

$$\begin{array}{l} \text{also } FX + EY \} : EY = FO + OE : OE \\ FX + GY \} + EG \} \\ \alpha \end{array}$$

mithin ist EY, somit Y, und die Linie OY der Lage nach gegeben.

Construction.

Buchstäblich, wie zu Fall 1.

Determination.

Damit der Punkt Y auf GC falle, muß $GE \leq EY$ seyn.

$$\begin{array}{l} \text{Nun ist } FX : EY = FO : OE \\ = FL : EG \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{also } FX + EY \} : EY = FL + EG : EG \\ FX + GY \} + EG \} \\ \alpha \end{array}$$

$$\text{folglich muß } \alpha + EG \leq FL + EG$$

$$\text{mithin } \alpha \leq LF \text{ seyn.}$$

Beweis.
 mithin bestimmen die näher liegenden Punkte der Linie LF die entfernsten.

$$\text{Es ist } \alpha \stackrel{=}{>} LF \text{ (Det.)}$$

$$\text{also } \alpha + EG \stackrel{=}{>} FL + EG$$

$$\text{Nun ist } FX : EY = FL : EG$$

$$\text{folglich } FX + EY : EY = FL + EG : EG$$

$$\text{mithin } FX + EY : EY \stackrel{=}{>} \alpha + EG : EG$$

$$FO + OE \} : EO \stackrel{=}{>}$$

$$HE \}$$

$$KE \} : EY$$

$$\alpha + EG \}$$

$$\text{somit } EY \stackrel{=}{>} EG$$

$$\text{Ferner ist } FX + EY \} : EY = KE : EY$$

$$FX + GY + EG \}$$

$$\text{also } FX + GY + EG = KE$$

$$\text{folglich } FX + GY \stackrel{=}{=} KG$$

$$= \alpha$$

Zus.

Buchst., wie Fall 1. **Zus.,** wenn GC statt ED gesetzt wird.

Fall 3.

Die Segmente sollen liegen auf den Linien FA , GD . (Fig. 107.)

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist, wenn die, die Linie CD in E schneidende gerade Linie FO gezogen wird,

$$\overline{FX : EY = FO : OE}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{also } FX - EY \\ FX + GY \end{array} \right\} : EY = FE : EO$$

mithin EY gegeben, somit die Linie OY der Lage nach bestimmt.

Construction.

Man mache $GK = \alpha$, $OY \parallel FK$.

Determination.

Damit Y auf GE falle, muß $KG > GE$, und

$EY < EG$ werden,

$$\text{also } \alpha - EG : EG < FE : EO$$

$$\text{folglich } \alpha : EG < \begin{cases} FO : OE \\ FL : EG, \text{ wenn OGL ge-} \\ \text{zogen wird,} \end{cases}$$

$$\text{mithin } \alpha < FL$$

Beweis.

$$\text{Es ist } \left. \begin{array}{l} \alpha \\ GK \end{array} \right\} > EG$$

also schneidet die Linie OY die Linie EC.

$$\text{Ferner ist } \alpha < FL$$

$$\text{also } \alpha : EG < \begin{cases} FL : EG \\ FO : OE \end{cases}$$

$$\text{folglich } \alpha - EG : GE = \begin{cases} FE : EO \\ KE : EY \\ \alpha - EG : EY \end{cases}$$

$$\text{mithin } GE = EY$$

$$\text{Nun ist } FX : EY = FO : OE$$

$$\text{also } \begin{cases} FX - EY \\ FX + GY - EG \end{cases} : EY = \begin{cases} FE : EO \\ KE : EY \\ \alpha - EG : EY \end{cases}$$

$$\text{folglich } FX + GY - EG = \alpha - EG$$

$$\text{mithin } FX + GY = \alpha$$

Zus.

Für eine andere, die Linien FL, GE in W, Z schneidende gerade Linie OW ist

$$WX : YZ = FO : OE$$

$$\text{also } WX > YZ$$

$$\text{folglich } \begin{matrix} FX + WX \\ FW \end{matrix} + \begin{matrix} GY + YZ \\ GZ \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \right\} FX + GY$$

mithin bestimmen die dem Punkte G näher liegenden Punkte der Linie GE grössere Summen, als die entfernteren.

II. Der Punkt O liegt zwischen den Parallelen.

Dieser Fall läßt sich behandeln, wie der vorhergehende.

Aufgabe II.

Von einem gegebenen Punkte, welcher sich mit zweyen der Lage nach gegebenen, nicht durch denselben gezogenen geraden Linien in einer Ebene befindet, eine gerade Linie zu ziehen, so daß der Unterschied der zwischen den Durchschnittspunkten mit jenen Linien und zweyen in denselben gegebenen Punkten gelegenen Segmente einer gegebenen geraden Linie gleich sey.

Aufgabe III. (Fig. 108. 109.)

Durch einen innerhalb eines der Lage nach gegebenen Winkels ABC gegebenen Punkt O eine gerade Linie XY zu legen, welche von den Schenkeln des gegebenen Winkels Segmente, deren Summen = einer gegebenen geraden Linie α sey, abschneide.

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist

$$DY : DO = OE : EX$$

$$\text{also } DY \cdot EX = DO \cdot OE$$

$$\begin{array}{l} \text{Es ist aber } BX + BY \} = \alpha \\ BE + EX + BD + DY \} \end{array}$$

$$\text{also } EX + DY = \alpha - (BE + BD)$$

folglich ist EX (Dat. 86.), somit der Punkt X , und die gerade Linie OX der Lage nach gegeben.

Construction.

Man mache $OD \parallel BC$, $OE \parallel AB$, $QB = BD$, $QH = \alpha$, $HG \parallel AB$, beschreibe über EH einen Halbkreis, mache $BEF = R = EHK$, $FE = EB$, $KH = HG$, ziehe FK , welche den Halbkreis in L erreiche, und errichte in L ein Perpendikel LX auf FK , so ist OX die gesuchte Linie.

Determination.

Damit FK den Halbkreis erreiche, muß

$$\left. \begin{array}{l} FE \cdot HK \\ DO \cdot OE \end{array} \right\} \leq \frac{1}{4} EH^2 \text{ seyn}$$

$$\text{also } 4DO \cdot OE \leq \begin{cases} EH^2 \\ (HQ - QE)^2 \\ (\alpha - (DO + OE))^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } 2\sqrt{DO \cdot OE} \leq \alpha - (DO + OE)$$

$$\text{mithin } DO + OE + 2\sqrt{DO \cdot OE} \leq \alpha$$

Beweis.

$$\text{Es ist } DO + OE + 2\sqrt{DO \cdot OE} \leq \alpha \quad (\text{Det.})$$

$$\text{also } 4DO \cdot OE \leq \begin{cases} (\alpha - (DO + OE))^2 \\ EH^2 \end{cases}$$

$$\text{folglich } FE \cdot HK \leq \frac{1}{4} EH^2$$

mithin berührt (Fig. 108.), oder schneidet (Fig. 109.) FK den Kreis.

Ferner ist $EX \cdot XH = FE \cdot HK$

$$= DO \cdot OE$$

$$= EX \cdot DY$$

somit $HX = DY$

$$\begin{aligned} \text{also } BX + BY &= BH + BD \\ &= QH \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Zus. 1.

Für eine andere, in Fig. 108. die Linien EC, DA in den Punkten Z, W schneidende gerade Linie OZ ist

$$\begin{aligned} DW \cdot EZ &= DO \cdot OE \\ &= EX \cdot XH \end{aligned}$$

$$\text{also } DW : EX = XH : EZ$$

$$\text{folglich } DW + EZ > EX + \begin{cases} XH \\ DY \end{cases}$$

$$\text{mithin } \begin{cases} BD + DW + BE + EZ \\ BW + BZ \end{cases} > \begin{cases} BD + DY + BE + EX \\ BY + BX \end{cases}$$

demnach bestimmt der Punkt X, für welchen $EX = \sqrt{DO \cdot OE}$, eine kleinere Summe, als jeder andere Punkt der Linie EC.

Ferner ist für die, die Linien EC, DA in q, p schneidende gerade Linie pq, $Eq \cdot Dp = DO \cdot OE = DW \cdot EZ$

$$\text{also } qE : EZ = WD : Dp$$

Ist nun $qE < EZ$

$$\text{so ist } qE + Dp > WD + DZ$$

$$\text{also } Bp + Dq > BW + DZ$$

mithin bestimmen die dem Punkte X näher liegenden Punkte der Linie EC kleinere Summen, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in Fig. 109. in dem zweiten Durchschnitte L' ein Perpendikel $L'X'$ auf FK , so bestimmt dasselbe eine zweite gerade Linie OX' mit der gegebenen Eigenschaft.

Anmerkung zu Aufgabe III. IV. V. VI.

Wenn in Aufgabe III. IV. V. VI. die Segmente nicht von der Spitze des Winkels, sondern von irgend zwey in den Schenkeln desselben gegebenen Punkten an genommen werden sollen, so erhellet leicht, wie diese Aufgaben auf die vorhergehenden sich reduciren lassen.

Aufgabe IV.

Durch einen zwischen den Schenkeln eines der Lage nach gegebenen Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie zu legen, welche von jenen Schenkeln Segmente, deren Unterschied gleich einer gegebenen geraden Linie Y' sey, abschneide.

Aufgabe V. (Fig. 110.)

Durch einen zwischen den Schenkeln eines der Lage nach gegebenen Winkels ABC gegebenen Punkte O eine gerade Linie zu legen, welche von den Schenkeln des Nebenwinkels des gegebenen Winkels Segmente abschneide, deren Summe einer gegebenen geraden Linie α gleich sey.

Analysis.

Es sey OX die gesuchte Linie, so ist

$$DY : DO = OE : EX$$

$$\text{also } DY \cdot EX = DO \cdot OE$$

$$\text{Nun ist } BX + BY \} = \alpha$$

$$EX - EB + BD - DY \}$$

$$\text{also } EX - DY = \alpha + EB - BD$$

folglich ist EX (Dat. 85.), somit X, und die gerade Linie OX der Lage nach gegeben.

Construction.

Man nehme $QB = BD$, $QH = \alpha$, $HG \parallel OE \parallel BD$, $CHK = R = CEF$, $KH = HG$, $FE = EB$, beschreibe über EH als Durchmesser einen Kreis, welcher die gerade Linie KF in L schneide, und errichte in L auf der Linie LF ein Perpendikel, welches die Linie BM in X treffe, so ist OX die gesuchte Linie.

Beweis.

$$\text{Es ist } EX \cdot XH = HK \cdot EF$$

$$= DO \cdot OE$$

$$= EX \cdot DY$$

$$\text{also } HX = DY$$

$$\text{folglich } BX + BY = EX - EB + BD - HX$$

$$= EH + EQ$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} HQ \\ \alpha \end{array} \right\}$$

Zus. 1.

Für eine andere, die Linien BM, BA in Z, W schneidende gerade Linie OZ ist

$$BX \geq BZ, \quad BY \geq BW$$

$$\text{also } BX + BY \geq BZ + BW$$

mithin bestimmen die dem Punkte B näher liegenden Punkte kleinere Summen, als die entfernteren.

Zus. 2.

Errichtet man in dem zweiten Durchschnitte L' des Kreises und der Linie LF ein Perpendikel auf LF, welches der Linie EC in X' begegne, so ist, wenn die, die Linie BA in Y' schneidende gerade Linie OX' gezogen wird, $EX' \cdot X'H = HK \cdot EF$

$$= DO \cdot OE$$

$$= EX' \cdot DY'$$

$$\text{also } HX' = DY'$$

$$\text{folglich } BY' - BX' = BD + HX' - BE - EX'$$

$$= EQ + EH$$

$$= QH$$

$$= \alpha$$

mithin ist auch eine Linie gefunden, welche von den Schenkeln des gegebenen Winkels Segmente abschneidet, deren Unterschied der Linie α gleich ist.

Aufgabe VI.

Durch einen zwischen den Schenkeln eines der Lage nach gegebenen Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche von den Schenkeln des Nebenwinkels jenes Winkels Segmente abschneide, deren Unterschied einer gegebenen geraden Linie gleich sey.

Aufgabe VII. (Fig. 111.)

Von einem außerhalb zweyer der Lage nach gegebenen Parallelen AB, CD gegebenen Punkte O eine gerade Linie OX durch dieselben zu ziehen, so daß die Summe der Quadrate der Segmente FX, EY, welche zwischen den Durchschnittspunkten X, Y und zweyen auf den Parallelen gegebenen Punkten F, G liegen, dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie α gleich sey.

Analysis.

OX sey die gesuchte Linie; so ist, wenn OF die Linie GY in E schneidet, $FX : EY = FO : OE$

$$\text{also } FX^2 : \left\{ \begin{array}{l} EY^2 \\ (GY - GE)^2 \\ GY^2 - 2GY \cdot GE + GE^2 \end{array} \right\} = FO^2 : OE^2$$

Bestimmt man r so, daß $r : GE = FO : OE$

$$\text{so ist } FX^2 - r^2 : GY^2 - 2GY \cdot GE = FO^2 : OE^2$$

folglich

$$\left\{ \begin{array}{l} FX^2 + GY^2 \\ \alpha^2 \end{array} \right\} - r^2 : \left\{ \begin{array}{l} GY^2 \\ \alpha^2 \end{array} \right\} - 2GY \cdot GE = FO^2 : FO^2 + OE^2$$

Bestimmt man h so, daß $\alpha^2 - r^2 : h^2 = FO^2 : FO^2 + OE^2$

$$\text{so ist } GY^2 : \left\{ \begin{array}{l} h^2 + r^2 - \alpha^2 \\ d^2 \\ 2EG \cdot k \\ 2EG(k + GY) \\ 2EG \cdot AY \end{array} \right\} + 2GY \cdot GE = FO^2 : FO^2 + OE^2$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } d^2 = h^2 + r^2 - \alpha^2 \\ \text{wenn } 2EG : d = d : k \\ \text{wenn } AG = k \end{array} \right.$

$$\text{folglich } 2EG \cdot AY : GY^2 = FO^2 + OE^2 : FO^2$$

mithin ist die Aufgabe auf Apoll. de Sect. det. lib. I. Pr. 2. Ep. 2. p. 2. reducirt. (Siehe die Bücher des Apollonius de sect. det. von Diesterweg, Bonn, 1822.)

Aufgabe VIII.

Von einem außerhalb zweyer der Lage nach gegebenen Parallelen gegebenen Punkte eine gerade Linie durch dieselben zu ziehen, so daß der Unterschied der Quadrate der Segmente, welche zwischen den Durchschnittspunkten und zweyen auf jenen Parallelen gegebenen Punkten liegen, dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie gleich sey.

Aufgabe IX. (Fig. 112. 113.)

Durch einen Punkt O, welcher auf der Halbierungslinie eines der Lage nach gegebenen Winkels BAC liegt, eine gerade Linie XY zu legen, welche von den Schenkeln jenes Winkels Segmente abschneide, deren Summe der Quadrate dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie α gleich sey.

Analysis.

Es sey XY die gesuchte Linie, sey auch OB $\perp$ AC, OC $\perp$ AB, so ist $YB : BO = OC : CX$

$$\begin{aligned} \text{also } BY.CX &= BO.OC \\ (AX-AC)(AY-AB) &= AC^2 \end{aligned}$$

mithin ist die Aufgabe auf die andere reducirt: die Seiten eines Rechteckes zu finden, wovon die Diagonale und derjenige Theil seines Flächenraumes gegeben ist, welcher übrig bleibt, wenn man seine Grundlinie und seine Höhe um gegebene gerade Linien abnehmen läßt.

Auflösung.

Man ziehe $OC \# AB$, $OB \# AC$, beschreibe über AC ein Quadrat $ACDF$, mache $DE = \alpha$, lege über DE einen Halbkreis, errichte in dem Mittelpunkte G auf EG ein den Halbkreis in H schneidendes Perpendikel, ziehe DH , $DK \# GH$, mache $DK = DH$, $AL = LD$, beschreibe aus L als Mittelpunkt mit einem Radius $= LK$ einen Kreis, welcher der verlängerten AD in R begegne, und aus R als Mittelpunkt mit einem Radius $= MR$ einen Kreis, welcher die verlängerte AC in X erreiche, und ziehe durch O, X die gerade Linie OX , welche der verlängerten Linie AB in Y begegne, so sind AX, AY die gesuchten Segmente.

Determination.

Damit der aus R mit RM beschriebene Kreis die Linie AC erreiche, muß, wenn $RQA = R$, seyn $MR > RQ$.

Es ist $AR = AL + LR$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \begin{cases} LK, & \text{wenn } AC = \beta, \\ \sqrt{\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\alpha^2} \end{cases}$$

Auch ist $AR : RQ = 1 : 5$ in. $\frac{1}{2}R$, $RM = DH$

$$= \sqrt{2} : 1$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\text{also } RQ = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{2}$$

$$\text{also muß seyn } \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}{2} < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\text{folglich } \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \alpha\sqrt{2 - \beta}$$

$$\text{mithin } \beta^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 - 2\alpha\beta\sqrt{2 + \beta^2}$$

$$\text{somit } 2\alpha\beta\sqrt{2} = \alpha^2$$

$$\text{demnach } 8\beta^2 = \alpha^2$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} 2\beta^2 \\ AD^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\text{folglich } AD = \frac{1}{2}\alpha$$

Beweis.

$$\text{Es ist } AD = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{also } AD^2 = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)^2$$

$$\text{folglich } 2\beta^2 = \frac{1}{4}\alpha^2$$

$$\text{mithin } 8\beta^2 = \alpha^2$$

also $RQ = RM$, wie aus der Determination leicht erhellet, folglich berührt (Fig. 112.), oder schneidet (Fig. 113.) der aus R mit RM beschriebene Kreis die Linie A Q.

Ferner ist $AR \cdot RD = RL^2 - LD^2 = DK^2 = DH^2 = RM^2 = RX^2$,
wenn RX gezogen wird

$$\text{also } AR : RX = RX : RD$$

folglich $\triangle ARX \cong \triangle DRX$, wenn XD gezogen wird

$$\text{mithin } \begin{cases} RAX \\ RAN \end{cases} = RXD$$

also liegen R, X, A, N auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in P , wenn $NP = PX$, weil $NAX = R$.

Zieht man RP , so ist $RPX = 2RAX$

$$= R$$

$$= DGH$$

$$\text{also } \triangle DGH \cong \triangle RPX$$

$$\text{folglich } \begin{cases} RP \\ NQ \end{cases} = DG$$

$$NQ$$

$$\text{mithin } NX = DE$$

$$= \alpha$$

$$\text{Auch ist } NF : FD = DC : CX$$

$$\text{somit } NF \cdot CX = FD \cdot DC$$

$$= BO \cdot OC$$

$$= BY \cdot CX$$

$$\text{also } NF = BY$$

$$\text{folglich } AY = AN$$

$$\text{mithin } AX^2 + AY^2 = AX^2 + AN^2$$

$$= NX^2$$

$$= \alpha^2$$

Zus. 1.

Zieht man (Fig. 112.) durch einen von X verschiedenen Punkt V auf der Verlängerung des Schenkels AC gerade Linien durch O, D , welche den Verlängerungen der Schenkel AB, AN in Z, W begegnen, so ist

$$\overline{VW > NX} \quad (\text{siehe Apoll. de inclinat. von Diesterweg, Bonn, 1823. pag. 25.})$$

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} VW^2 \\ AW^2 + AV^2 \\ AZ^2 \end{array} \right\} > \left. \begin{array}{l} NX^2 \\ AY^2 + AX^2 \end{array} \right\}$$

mithin bestimmt der Punkt X eine kleinere Summe der Quadrate der Segmente, als jeder andere Punkt der verlängerten AC.

Auch ist, wenn $tX > XV$, und die, die Schenkel AZ, AW in u, r schneidenden geraden Linien tou, tdr gezogen werden, $tr > VW$ (s. Apoll de incl. l. c.)

$$\text{also } \left. \begin{array}{l} tr^2 \\ tA^2 + \left\{ \begin{array}{l} Ar^2 \\ Au^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} > \left. \begin{array}{l} VW^2 \\ VA^2 + \left\{ \begin{array}{l} AW^2 \\ AZ^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

mithin bestimmen die dem Punkte X der verlängerten AC näher liegenden Punkte kleinere Quadratsummen, als die entfernteren.

Zus. 2.

In Fig. 113. bestimmt der zweite Durchschnitt X' des Kreises mit der Linie AQ eine zweite Linie mit der gegebenen Eigenschaft.

Zus. 3.

Bezeichnet man mit R' den zweiten Durchschnitt der Linie DE und des aus L als Mittelpunkt mit einem Radius = LK beschriebenen Kreises, und bestimmt man in Beziehung auf R' Linien, wie es für R geschehen ist, so ergibt sich, daß dadurch auf den Schenkeln der Nebenwinkel des Winkels BAC Segmente mit derselben Eigenschaft bestimmt werden.

Aufgabe X.

Durch einen auf der Halbierungslinie eines der Lage nach gegebenen Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie zwischen die Schenkel des Winkels zu legen, welche von den Schenkeln des Winkels Segmente abschneide, deren Differenz der Quadrate dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie gleich sey.

Durch einen auf der Halbierungslinie eines der
Lage nach gegebenen Winkels gegebenen Punkt eine
gerade Linie zwischen die Schenkel des Winkels zu
legen, welche von den Schenkeln des Winkels be-
trachte abschneide, deren Differenz der Quadrate dem
Quadrat einer gegebenen geraden Linie gleich sey.

Nachricht für den Buchbinder:

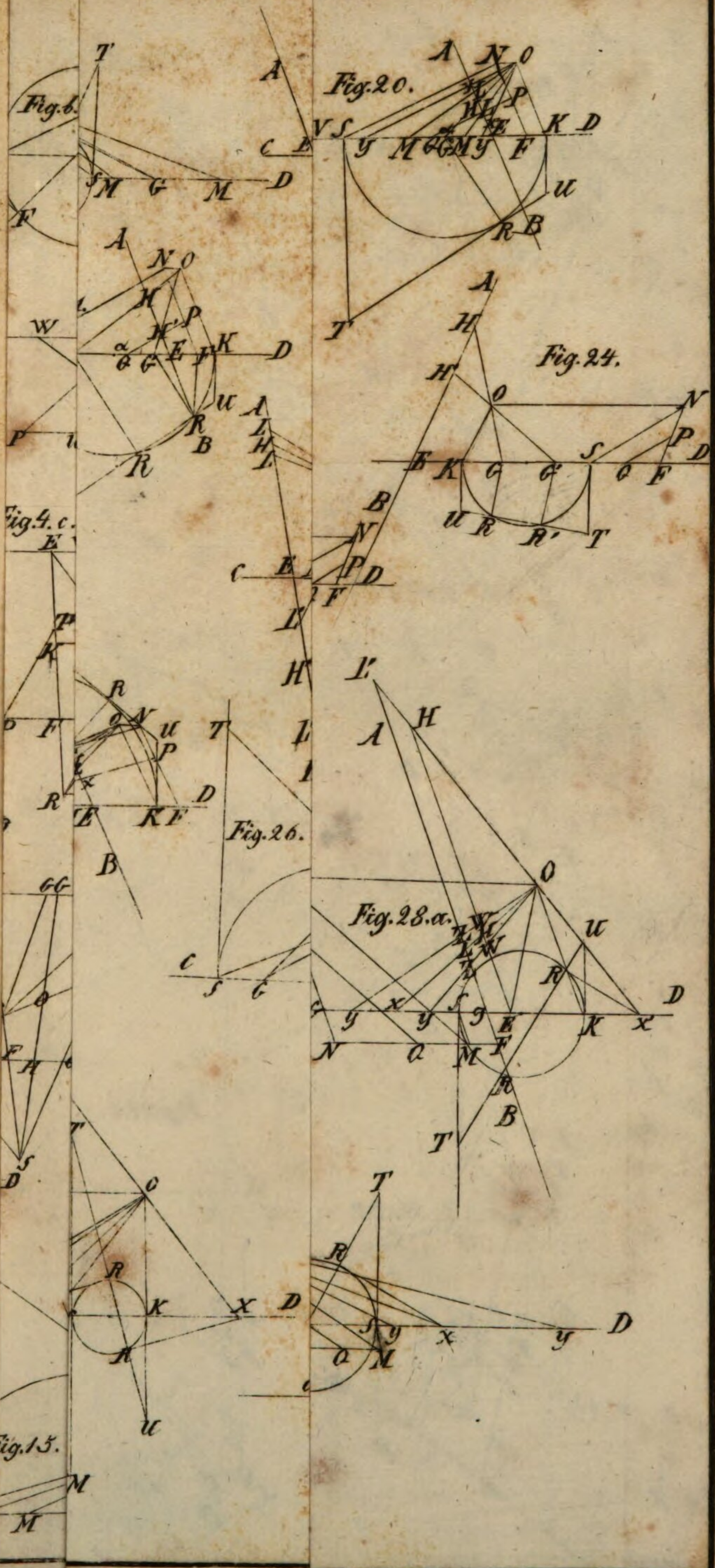
Taf. 5. wird dem Lateinischen der Vorrede bey-
geheftet.

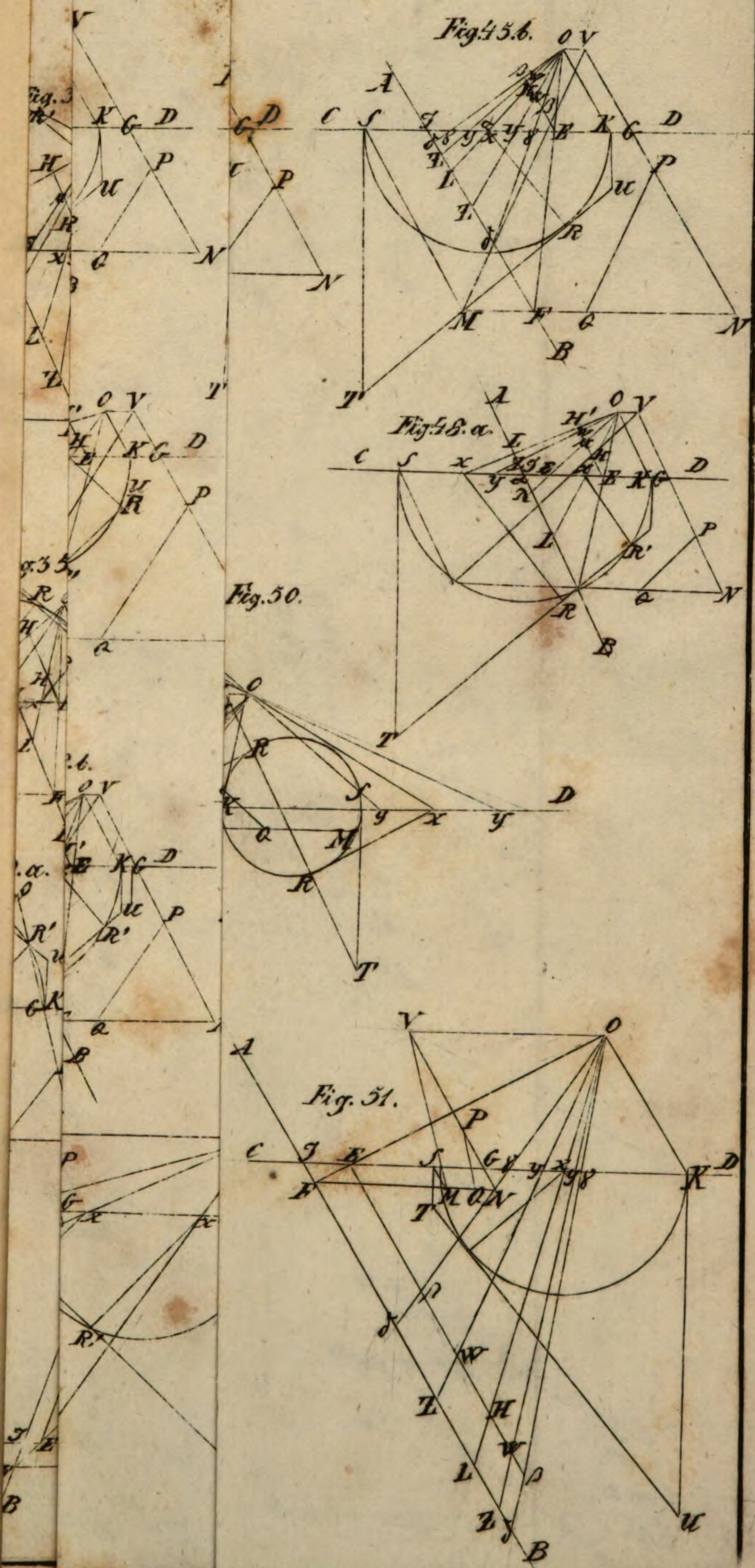
Die Aufgabe ist in zwei Theile getheilt.
Der erste Theil ist die Konstruktion der Linie A Q eine solche Linie
mit der gegebenen Eigenschaft.

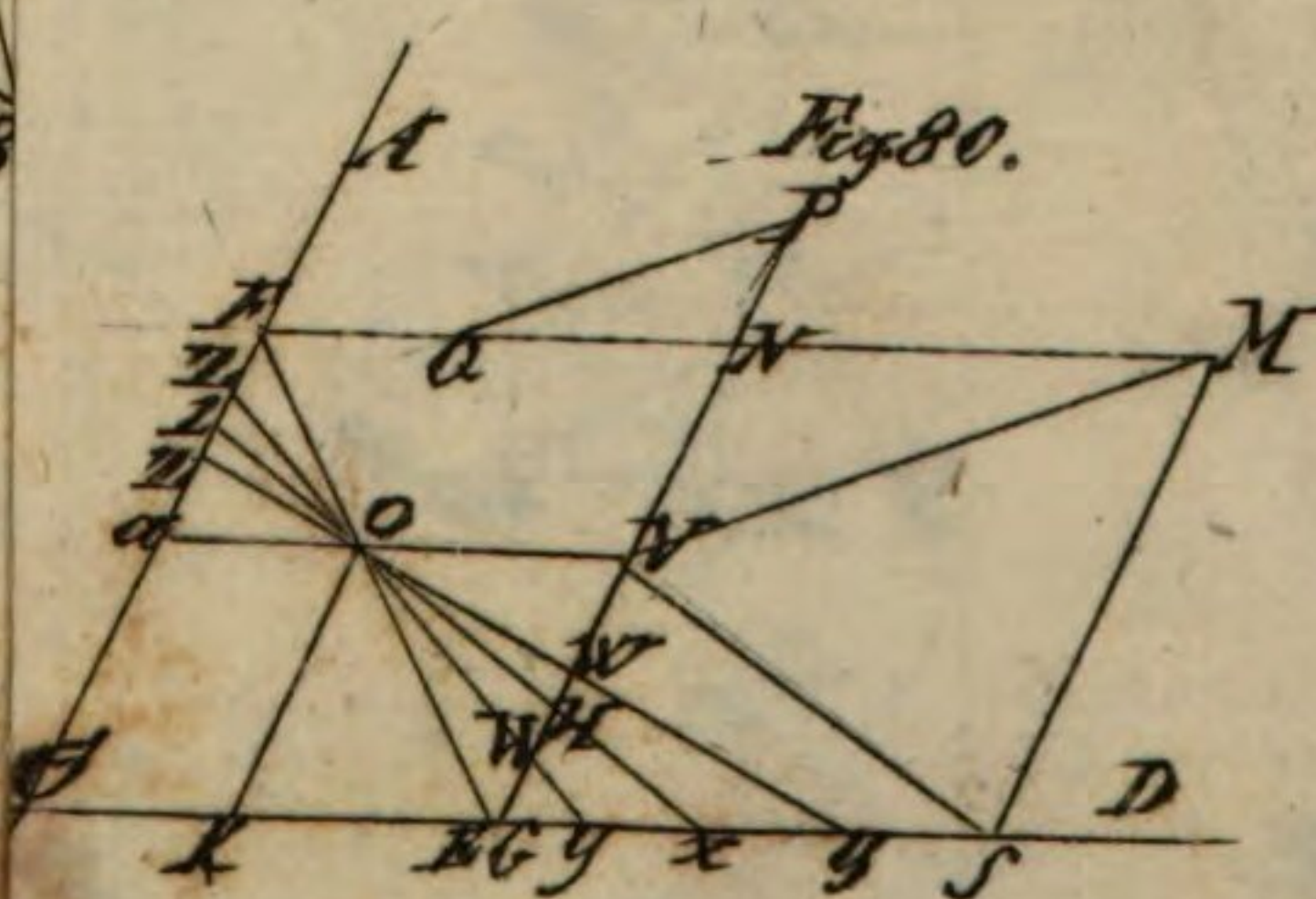
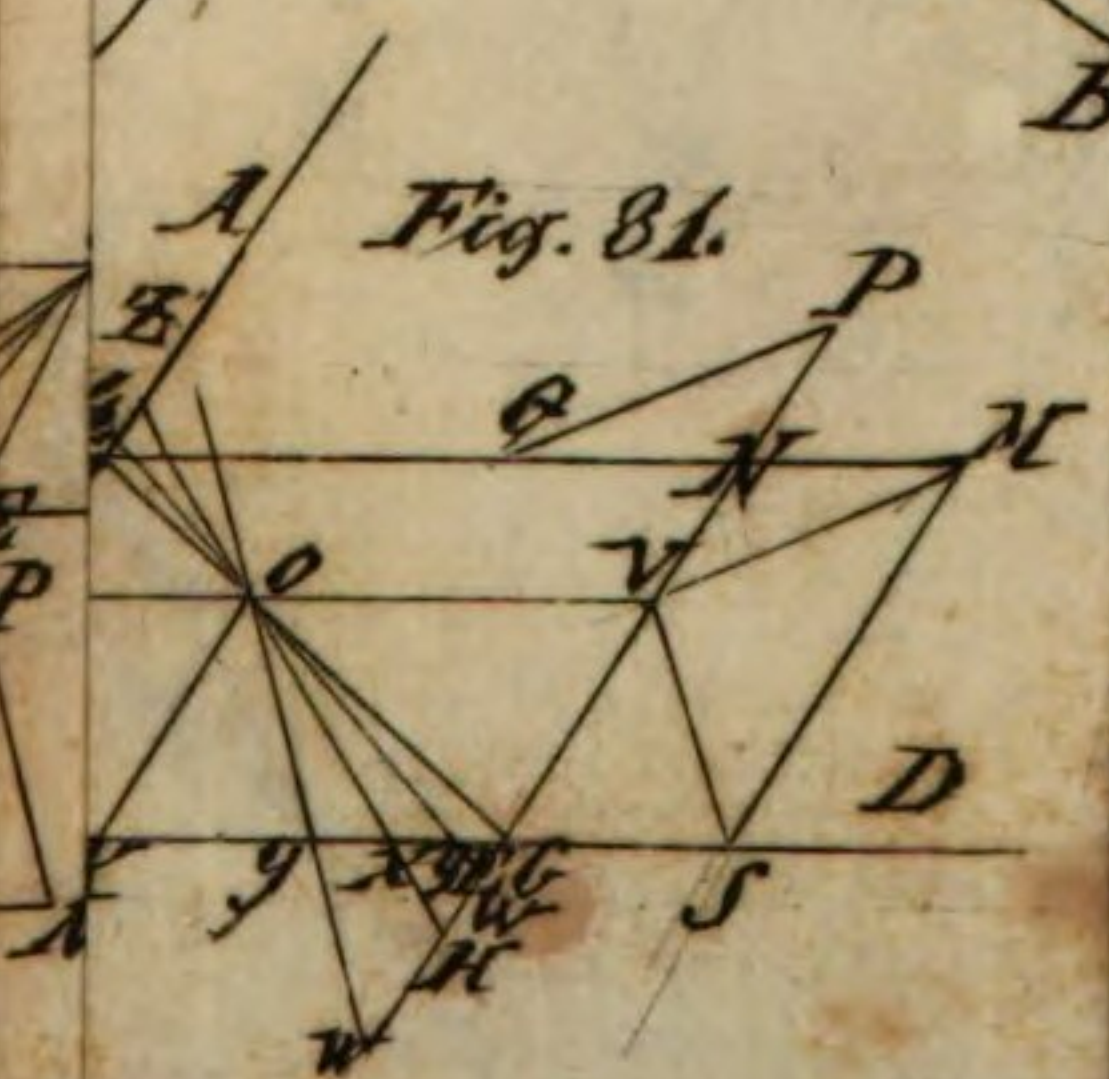
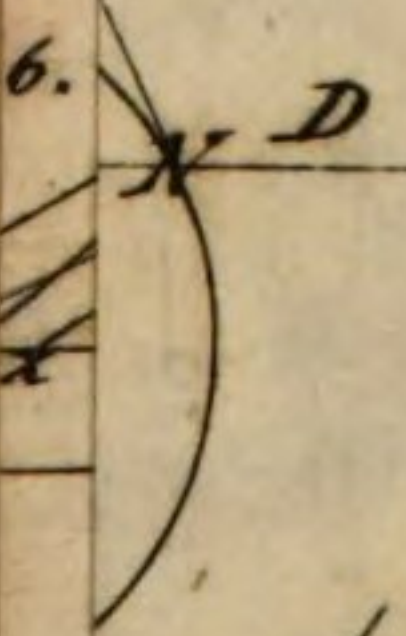
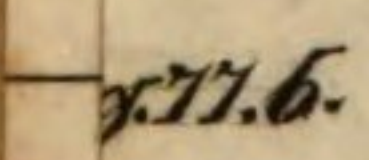
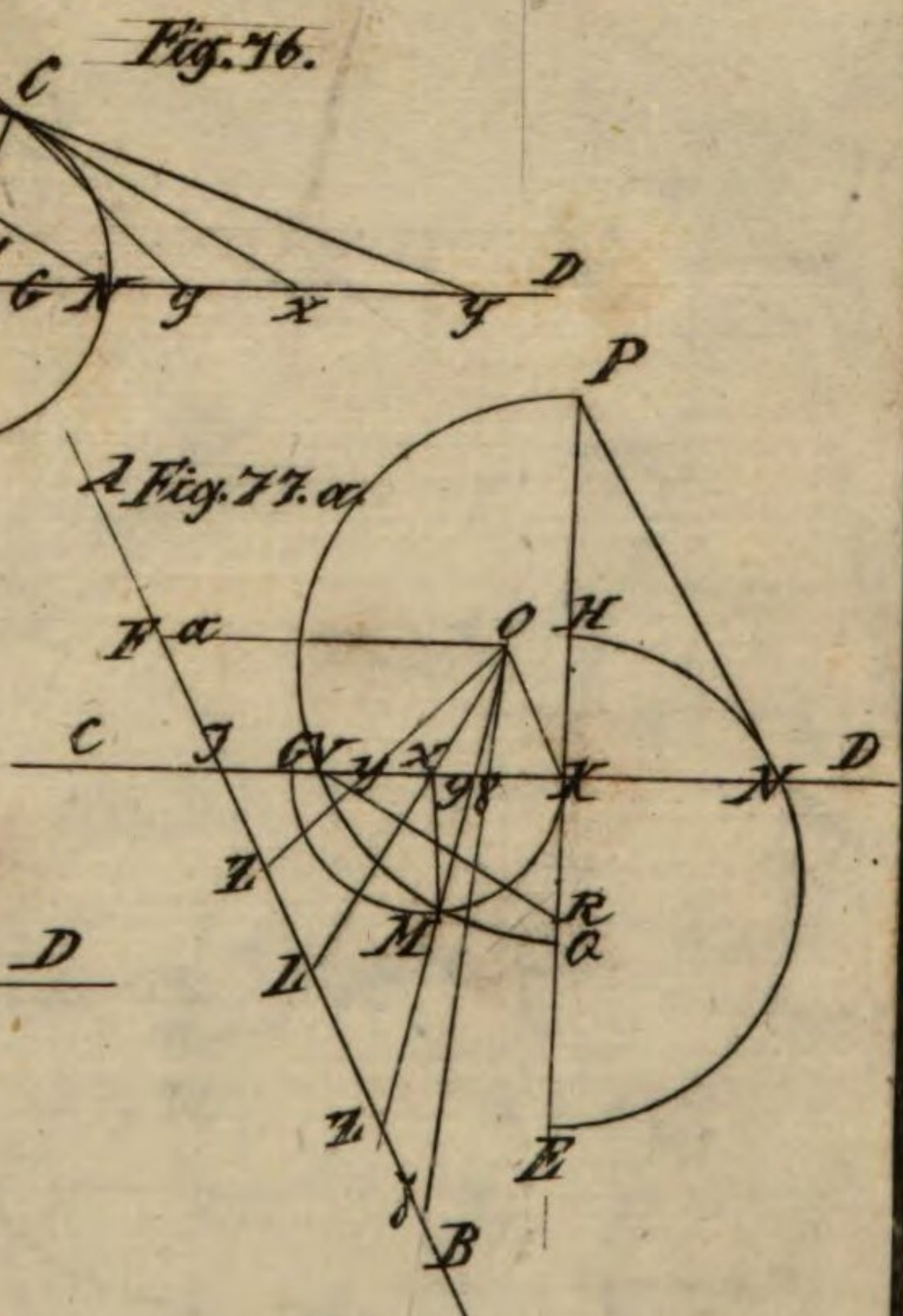
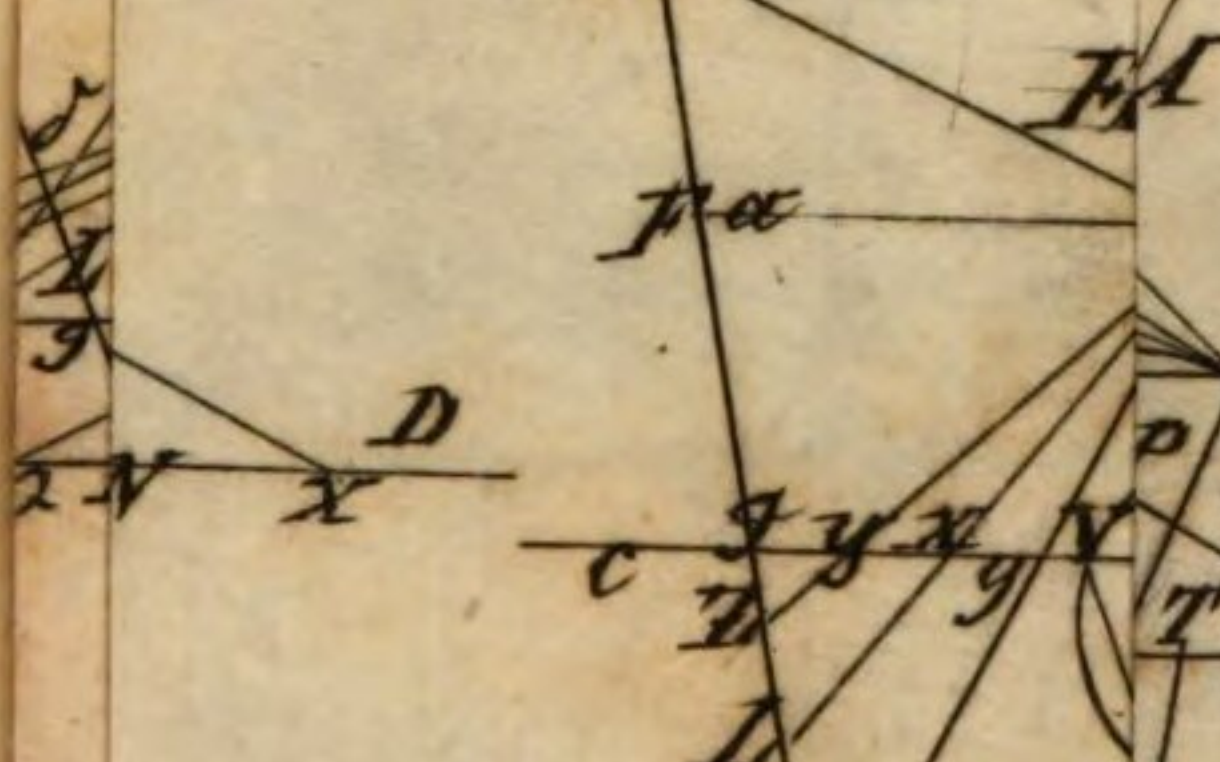
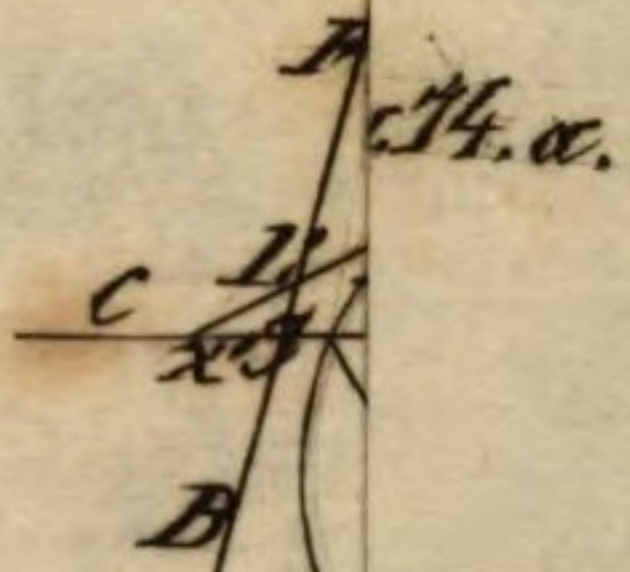
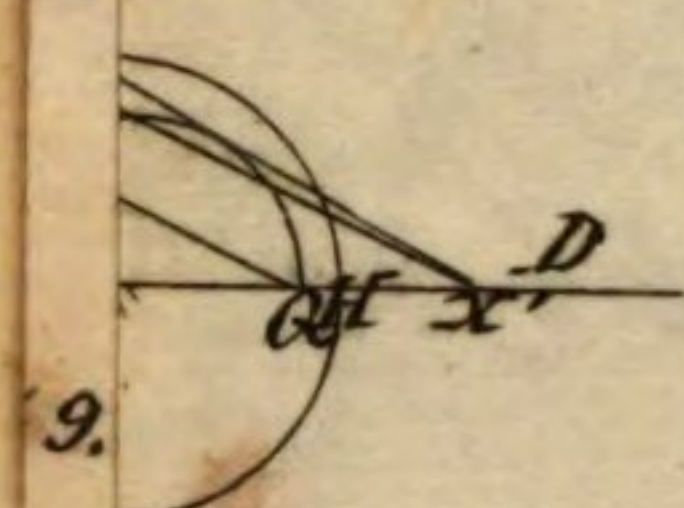
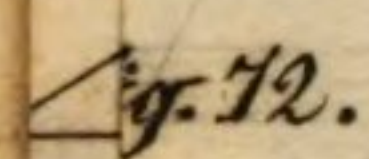
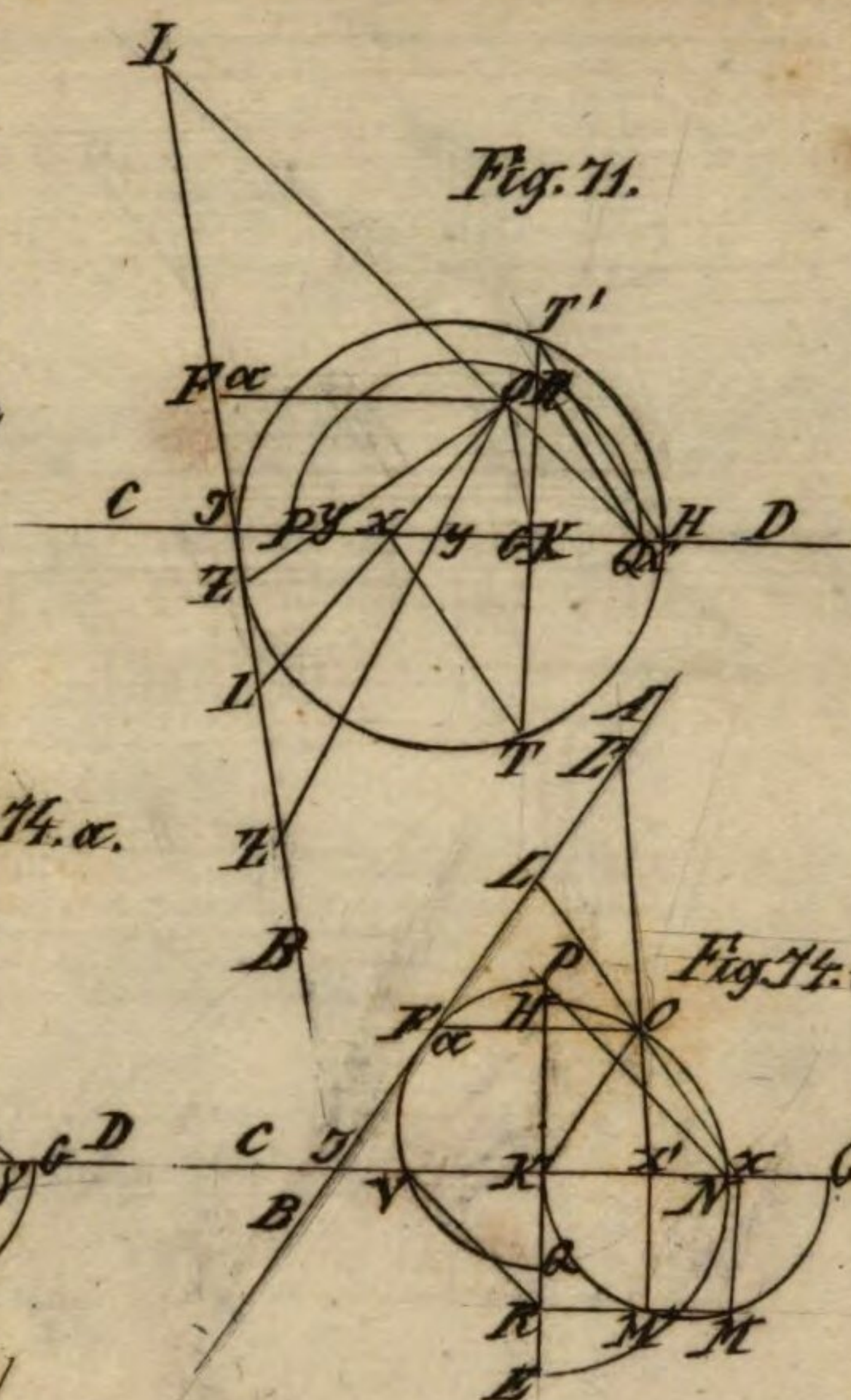
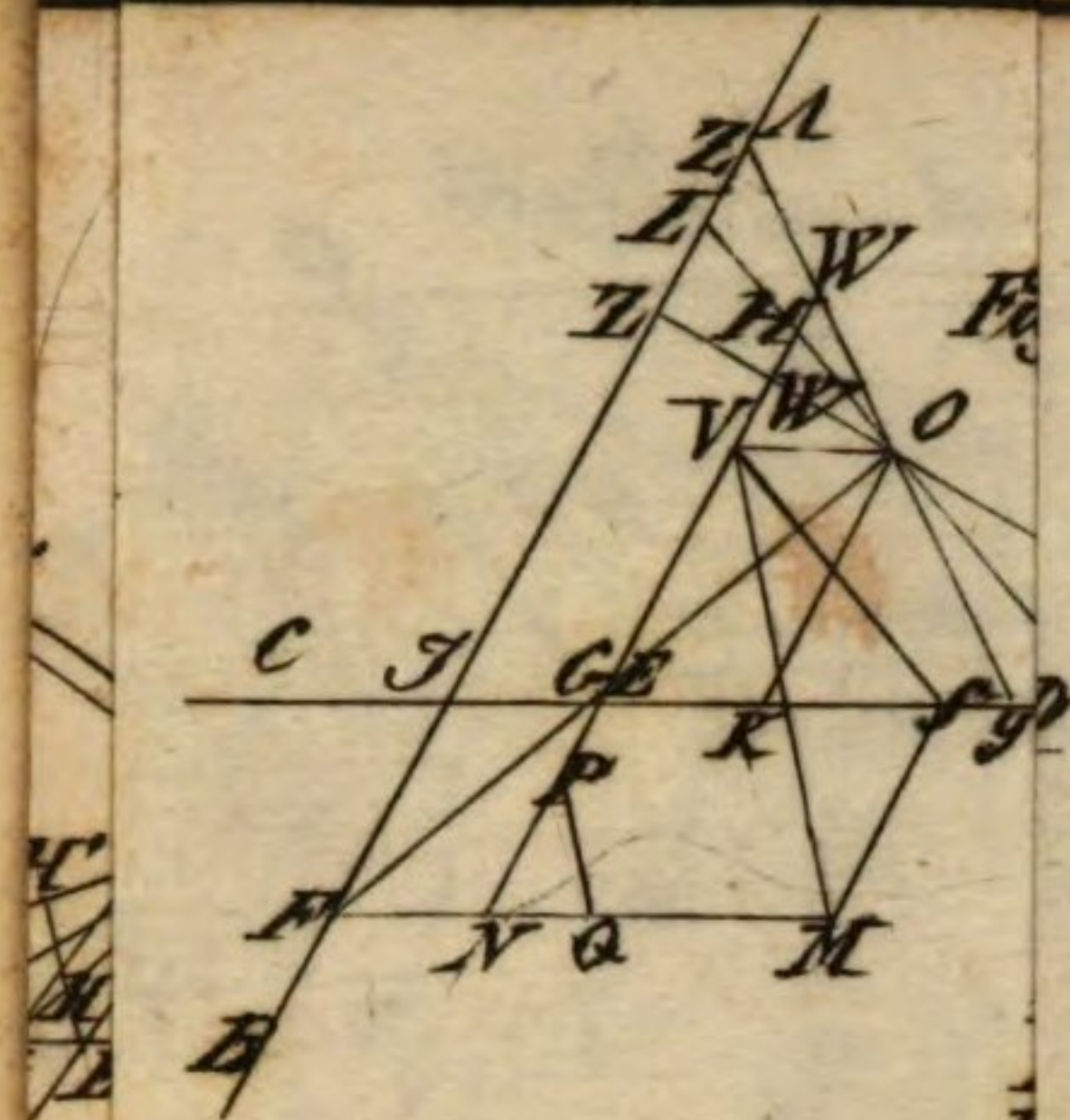
Fig. 3.

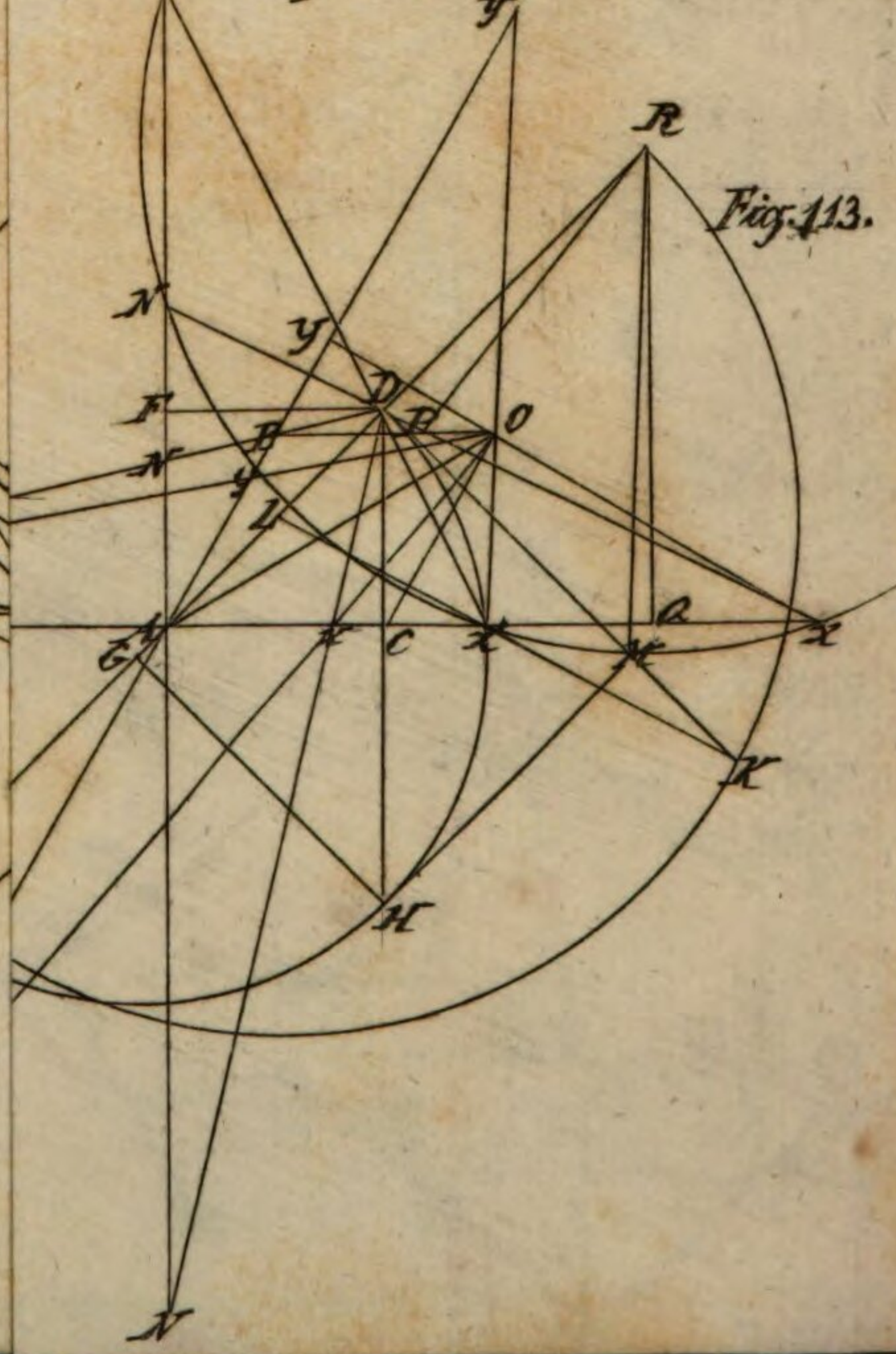
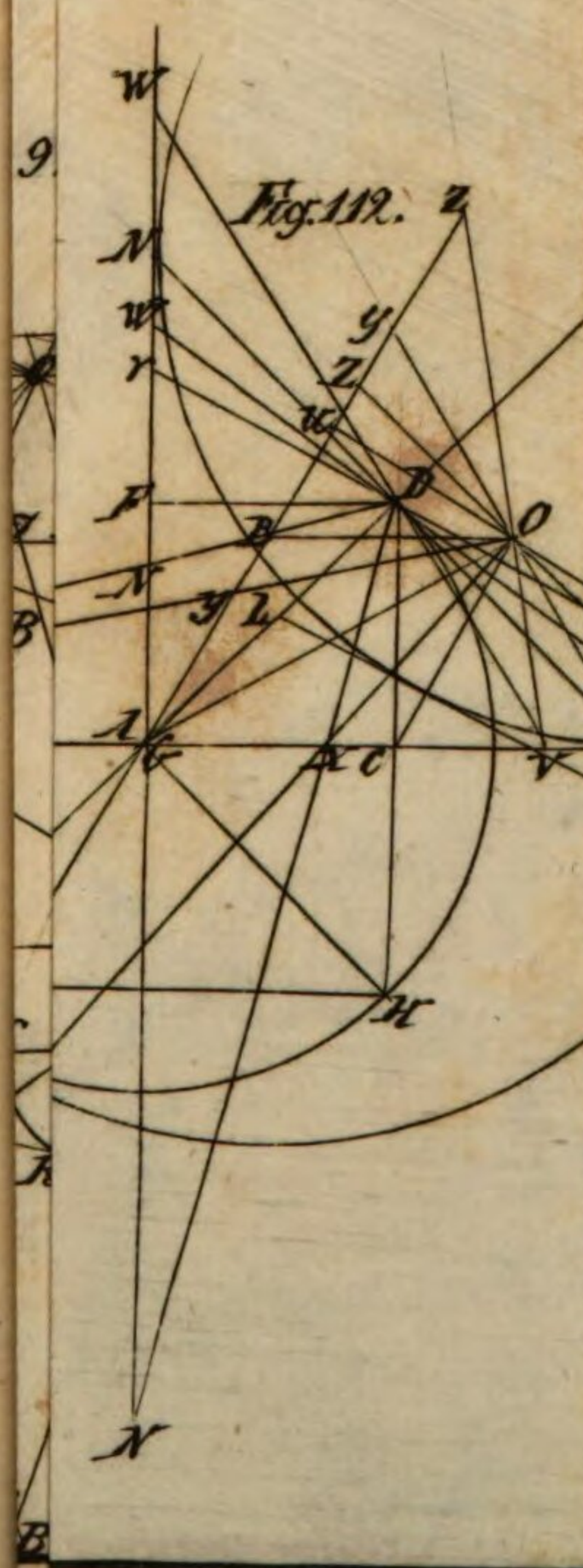
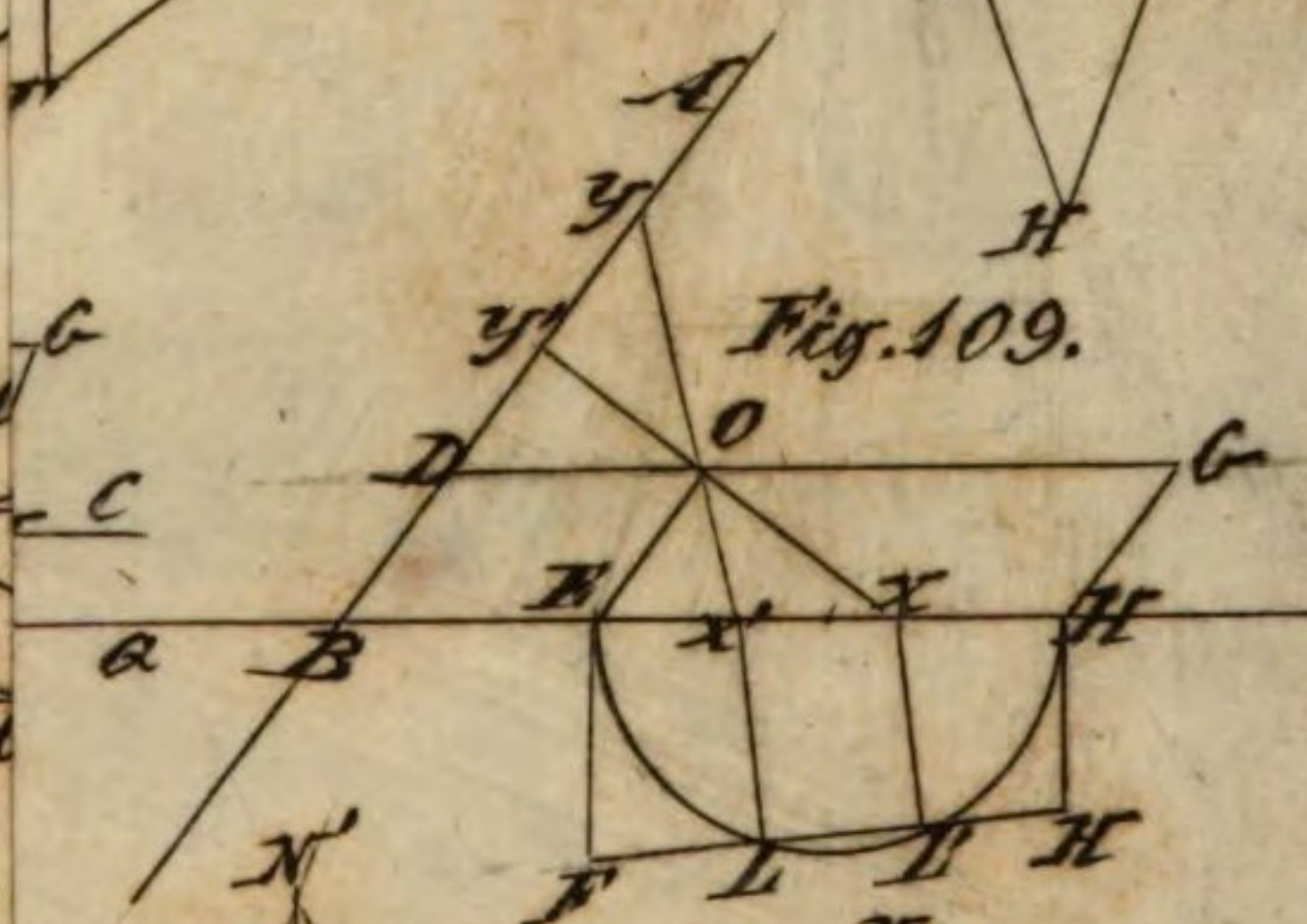
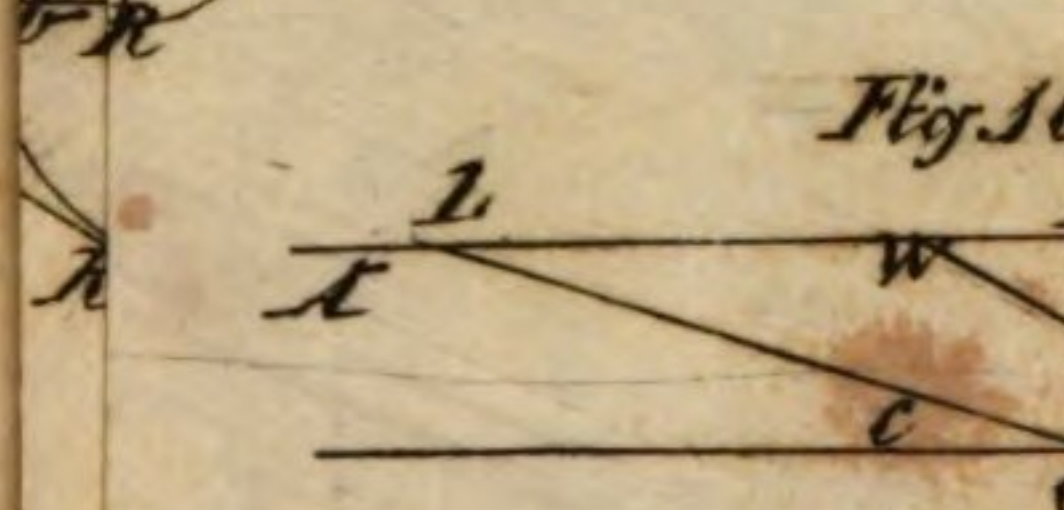
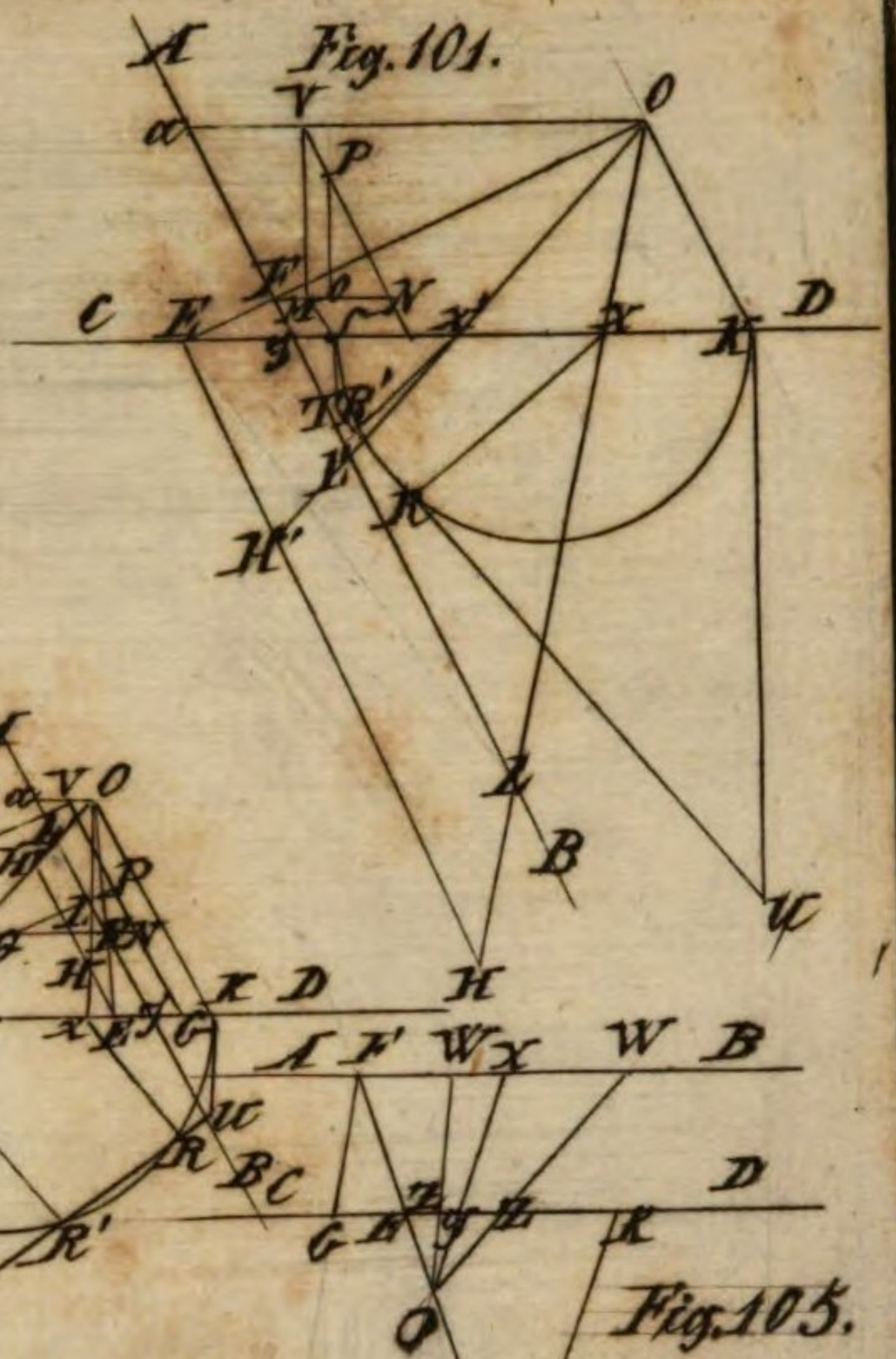
Man nehme mit R den ersten Durch-
schnitt der Linie D E und des aus E als Mittel-
punkt mit einem Radius = I K beschriebenen Krei-
ses, und bestimme man in Beziehung auf R Linien,
wie es für R geschehen ist, so ergibt sich, daß
dadurch auf den Schenkeln der Winkel die

Bonn, gedruckt bey C. F. Thormann.









Apollonius / Halley, Edmond, / Diesterweg, Wilhelm Adolf,

Die Bücher des Apollonius von Perga De sectione rationis mit 5 Steintafeln

Berlin 1824

A.gr.b. 468

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10234704-1